∽ Corrigé du baccalauréat Amérique du Sud 21 novembre 2024 ∾
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ Jour 1

Exercice 1 — 5 points

PARTIE A

On considère l'équation différentielle (E) : $\quad y' + \dfrac{1}{4}y = 20\,\text{e}^{-\frac{1}{4}x}$,

d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = ax\,\text{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

   La fonction linéaire u définie par $u(x) = -\dfrac{1}{4}x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle $u'(x) = -\dfrac{1}{4}$.

   La fonction composée $g(u(x)) = ax\,\text{e}^{u(x)}$ est elle aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle, $g'(u) = a\,\text{e}^{u(x)} + axu' \times \text{e}^{u(x)} = a\,\text{e}^{-\frac{1}{4}x} + ax \times \left(-\dfrac{1}{4}\right)\text{e}^{-\frac{1}{4}x} = \text{e}^{-\frac{1}{4}x}\left(a - \dfrac{ax}{4}\right)$.

   Or $g'(x) + \dfrac{1}{4}g(x) = \text{e}^{-\frac{1}{4}x}\left(a - \dfrac{ax}{4}\right) + \dfrac{1}{4} \times ax\,\text{e}^{-\frac{1}{4}x} = \text{e}^{-\frac{1}{4}x}\left(a - \dfrac{ax}{4} + \dfrac{ax}{4}\right) = a\,\text{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

   Donc g est solution de l'équation différentielle sur $[0\,;\,+\infty[$, si sur cet intervalle :

   $a\,\text{e}^{-\frac{1}{4}x} = 20\,\text{e}^{-\frac{1}{4}x} \iff a = 20$, car quel que soit x réel, $\text{e}^{-\frac{1}{4}x} \neq 0$.

   La fonction $g : x \longmapsto 20x\,\text{e}^{-\frac{1}{4}x}$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ est une solution particulière de l'équation (E).

2. On considère l'équation différentielle (E') : $\quad y' + \dfrac{1}{4}y = 0$,

   d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

   L'équation (E') peut s'écrire $y' = -\dfrac{1}{4}y$ et on sait que les solutions de cette équation (E') sont les fonctions f définies par :

   $f(x) = K\,\text{e}^{-\frac{1}{4}x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

3. Les solutions f de l'équation (E) sont telles que pour $x \in [0\,;\,+\infty[$,

   $f'(x) + \dfrac{1}{4}f(x) = 20\,\text{e}^{-\frac{1}{4}x}$ ou d'après la question 1. :

   $f'(x) + \dfrac{1}{4}f(x) = g'(x) + \dfrac{1}{4}g(x) \iff f'(x) - g'(x) = \dfrac{1}{4}[f(x) - g(x)]$ soit par linéarité de la dérivation :

   $(f-g)'(x) + \dfrac{1}{4}[(f-g](x) = 0$: ceci signifie que la fonction $f - g$ est solution de (E') c'est-à)dire que

   $f(x) - g(x) = K\,\text{e}^{-\frac{1}{4}x} \iff f(x) = K\,\text{e}^{-\frac{1}{4}x} + g(x)$ ou enfin $f(x) = K\,\text{e}^{-\frac{1}{4}x} + 20x\,\text{e}^{-\frac{1}{4}x} \iff f(x) = (20x + K)\,\text{e}^{-\frac{1}{4}x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (E) sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ sont donc les fonctions f définies par : $f(x) = \text{e}^{-\frac{1}{4}x}(20x + K)$, avec $K \in \mathbb{R}$.

4. On a $f(0) = 8 \iff (20 \times 0 + K)\,\text{e}^0 = 8 \iff K = 8$, donc :

$f(x) = (20x + 8)\,\text{e}^{-\frac{1}{4}x} = 4\,(5x + 2)\,\text{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par $f(x) = (20x + 8)\,\text{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

1. **a.** La fonction f est la fonction trouvée à la fin de la partie A : elle est donc dérivable et vérifie l'équation (E), soit

$f'(x) + \dfrac{1}{4}f(x) = 20\,\text{e}^{-\frac{1}{4}x}$ donc

$f'(x) = 20\,\text{e}^{-\frac{1}{4}x} - \dfrac{1}{4} \times 4(5x + 2)\,\text{e}^{-\frac{1}{4}x} = \text{e}^{-\frac{1}{4}x}(20 - 5x - 2) = (18 - 5x)\,\text{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

b. Comme quel que soit x, $\text{e}^{-\frac{1}{4}x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $18 - 5x$:

- $18 - 5x > 0 \iff \dfrac{18}{5} > x$: sur l'intervalle $\left[0~;~\dfrac{18}{5}\right]$, $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante ;
- $18 - 5x < 0 \iff \dfrac{18}{5} < x$: sur l'intervalle $\left[\dfrac{18}{5}~;~+\infty\right]$, $f'(x) < 0$: la fonction f est décroissante ;

$f'\left(\dfrac{18}{5}\right) = 0$, donc $f\left(\dfrac{18}{5}\right)$ est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

On a $f\left(\dfrac{18}{5}\right) = (72 + 8)\,\text{e}^{-\frac{1}{4} \times \frac{18}{5}} = 80\,\text{e}^{-\frac{9}{10}} \approx 32{,}53$.

On a vu à la partie A que $f(0) = 8$, et on admet que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

D'où le tableau de variations :

x	0		$\frac{18}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	8	$\nearrow$	$80\,\text{e}^{-\frac{9}{10}}$	$\searrow$	0

2. Dans cette question on s'intéresse à l'équation $f(x) = 8$.

a. On a $f(14) = 288\,\text{e}^{-3{,}5} \approx 8{,}7$ et $f(15) = 300\,\text{e}^{-3.75} \approx 7{,}2$.

Sur l'intervalle $[14;~15]$, la fonction f est continue car dérivable sur $[0~;~+\infty[$, donc sur $[14;~15]$ et elle est strictement décroissante ; comme $8 \in [f(15)~;~f(14)]$, il existe d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires un réel unique α telle que $f(\alpha) = 8$.

b. On complète le tableau ci-dessous en faisant tourner étape par étape la fonction `solution_equation` écrite en langage Python

a	14	14	14,25	14,375	14,4375
b	15	14,5	14,5	14,5	14,5
$b-a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	14,5	14,25	14,375	14,4375	
Condition $f(m) > 8$	FAUX	VRAI	VRAI	VRAI	

c. L'objectif de la fonction `solution_equation` est de déterminer, par dichotomie, un encadrement d'amplitude 0,1 de la solution de l'équation $f(x) = 8$ dans l'intervalle $[14 ; 15]$.

Exercice 2 — 6 points

On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 4 boules noires et 6 boules blanches. L'urne U_2 contient 1 boule noire et 3 boules blanches.

On considère l'expérience aléatoire suivante : on pioche au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans U_2, puis on pioche au hasard une boule dans U_2.

On note :

- N_1 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_1 ».
- N_2 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_2 ».

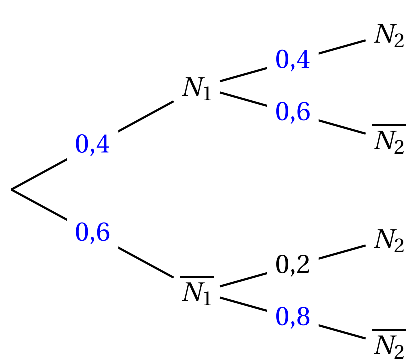
Pour tout évènement A, on note $\overline{A}$ son évènement contraire.

PARTIE A

1. **a.** Si on a pioché une boule blanche dans U_1 et qu'on l'a mise dans U_2, il y a dans l'urne U_2 1 boule noire et 4 boules blanches. La probabilité de piocher alors une boule noire dans l'urne U_2 est $P_{\overline{N_1}}(N_2) = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$.

b. Dans U_1 il y a 4 boules noires et 6 boules blanches donc la probabilité de piocher une boule noire est $P(N_1) = \dfrac{4}{10} = 0{,}4$.

Si on a pioché une boule noire dans U_1 et qu'on l'a mise dans U_2, il y a dans l'urne U_2 2 boules noires et 3 boules blanches. La probabilité de piocher alors une boule noire dans l'urne U_2 est $P_{N_1}(N_2) = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$.



2. La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_1 et une boule noire dans l'urne U_2 est : $P\left(N_1 \cap N_2\right) = P\left(N_1\right) \times P_{N_1}\left(N_2\right) = 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$.
3. On cherche la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2.

   D'après la formule des probabilités totales :

   $P\left(N_2\right) = P\left(N_1 \cap N_2\right) + P\left(\overline{N_1} \cap N_2\right) = 0{,}16 + 0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}28$.
4. On a pioché une boule noire dans l'urne U_2.

   La probabilité d'avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1 est :

   $$P_{N_2}\left(\overline{N_1}\right) = \dfrac{P\left(N_2 \cap \overline{N_1}\right)}{P\left(N_2\right)} = \dfrac{0{,}12}{0{,}28} = \dfrac{3}{7} \approx 0{,}43.$$

PARTIE B

n désigne un entier naturel non nul.

L'expérience aléatoire précédente est répétée n fois de façon identique et indépendante, c'est-à-dire que les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2, entre chaque expérience.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2.

On rappelle que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28 et celle de piocher une boule blanche dans l'urne U_2 est égale à 0,72.

1. D'après le texte, on est dans le cas de n répétitions, de façon identique et indépendante, d'une expérience qui n'a que deux issues.

   Donc la variable X qui donne le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2, suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}28$.
2. On résout l'inéquation $1 - 0{,}72^n \geqslant 0{,}9$.

   $$\begin{aligned} 1 - 0{,}72^n \geqslant 0{,}9 &\iff 1 - 0{,}9 \geqslant 0{,}72^n \iff 0{,}1 \geqslant 0{,}7^n \\ &\iff \ln(0{,}1) \geqslant \ln\left(0{,}72^n\right) \quad \left(\text{fonction ln croissante sur } [0\,;\,+\infty[\right) \\ &\iff \ln(0{,}1) \geqslant n\ln(0{,}72) \\ &\iff \dfrac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}72)} \leqslant n \quad \left(\ln(0{,}72) < 0\right) \end{aligned}$$

   $\dfrac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}72)} \approx 7{,}01$ donc le plus petit entier naturel n tel que : $1 - 0{,}72^n \geqslant 0{,}9$ est 8.
3. 0,72 est la probabilité de piocher une boule blanche dans l'urne U_2.

   $0{,}72^n$ est la probabilité de piocher n boules blanches dans l'urne U_2 lors des n tirages.

   $1 - 0{,}72^n$ est la probabilité de l'événement contraire, c'est-à-dire la probabilité de piocher au moins une boule noire lors des n tirages.

   Il faut donc au moins 8 tirages pour que la probabilité de piocher au moins une boule noire soit supérieure à 0,9.

PARTIE C

Dans cette partie les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2.

On considère la nouvelle expérience aléatoire suivante : on pioche simultanément deux boules dans l'urne U_1 que l'on place dans l'urne U_2, puis on pioche au hasard une boule dans l'urne U_2.

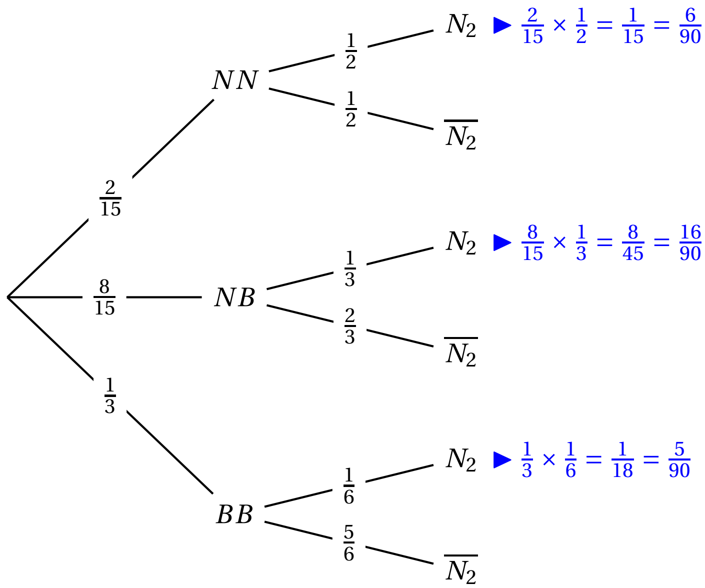
1. Dans l'urne U_1 il y a 10 boules et on en prend 2 simultanément ; il y a donc $\binom{10}{2} = 45$ tirages possibles.
2. Il y a 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 ; le nombre de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 contenant exactement une boule blanche et une boule noire est donc $\binom{4}{1} \times \binom{6}{1} = 4 \times 6 = 24$.
3. On examine les différents cas.
   - On a pioché 2 boules noires dans U_1 (événement noté NN).
     - ▷ $P(NN) = \dfrac{\binom{4}{2}}{45} = \dfrac{6}{45} = \dfrac{2}{15}$
     - ▷ On a mis les 2 boules noires piochées dans U_1 dans l'urne U_2 ; l'urne U_2 contient alors 3 boules noires et 3 boules blanches.

       La probabilité de piocher une boule noire dans U_2 est alors $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.
   - On a pioché 1 boule noire et 1 boule blanche dans U_1 (événement noté NB).
     - ▷ $P(NB) = \dfrac{24}{45} = \dfrac{8}{15}$
     - ▷ On a mis les 2 boules, une noire une blanche, piochées dans U_1 dans l'urne U_2 ; l'urne U_2 contient alors 2 boules noires et 4 boules blanches.

       La probabilité de piocher une boule noire dans U_2 est alors $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.
   - On a pioché 2 boules blanches dans U_1 (événement noté BB).
     - ▷ $P(BB) = \dfrac{\binom{6}{2}}{45} = \dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3}$
     - ▷ On a mis les 2 boules blanches piochées dans U_1 dans l'urne U_2 ; l'urne U_2 contient alors 1 boule noire et 5 boules blanches.

       La probabilité de piocher une boule noire dans U_2 est alors $\dfrac{1}{6}$.

   On résume la situation dans un arbre pondéré.



La probabilité de piocher une boule noire dans U_2 est, d'après la formule des probabilités totales :

$P(N_2) = P(NN\cap N_2) + P(NB\cap N_2) + P(BB\cap N_2) = \dfrac{6}{90} + \dfrac{16}{90} + \dfrac{5}{90} = \dfrac{27}{90} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$

La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 avec cette nouvelle expérience est égale à 0,3 ; elle est donc supérieure à la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2 avec l'expérience de la partie A qui était de 0,28.

Exercice 3 — 4 points

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout n non nul par $u_n = \dfrac{25+(-1)^n}{n}$.

Affirmation 1 : La suite (u_n) est divergente.

Pour tout n non nul, on a : $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant +1$ donc $25-1 \leqslant 25+(-1)^n \leqslant 25+1$ donc $24 \leqslant 25+(-1)^n \leqslant 26$ donc $\dfrac{24}{n} \leqslant \dfrac{25+(-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{26}{n}$ donc $\dfrac{24}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{26}{n}$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{24}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{26}{n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut déduire que la suite (u_n) est convergente et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Affirmation 1 fausse

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} w_0 & = 1 \\ w_{n+1} & = \dfrac{w_n}{1+w_n} \end{cases}$

On admet que pour tout entier naturel n, $w_n > 0$n et on considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = \dfrac{k}{w_n}$ où k est un nombre réel strictement positif.

Affirmation 2 : La suite (t_n) est une suite arithmétique strictement croissante.

Pour tout n, on a : $t_{n+1} = \dfrac{k}{w_{n+1}} = \dfrac{k}{\frac{w_n}{1+w_n}} = \dfrac{k(1+w_n)}{w_n} = \dfrac{k+kw_n}{w_n} = \dfrac{k}{w_n} + k = t_n + k$

Donc la suite (t_n) est arithmétique de raison k.

De plus, $k > 0$ donc la suite (t_n) est strictement croissante.

Affirmation 2 vraie

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 &= 1 \\ v_{n+1} &= \ln(1+v_n) \end{cases}$

On admet que pour tout entier naturel n, $v_n > 0$,

Affirmation 3 : La suite (v_n) est décroissante.

Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $v_n > v_{n+1}$.

On va démontrer par récurrence que cette propriété est vraie pour tout n.

- **Initialisation**

  $v_0 = 1$ et $v_1 = \ln(1+v_0) = \ln(2) \approx 0{,}69$; donc $v_0 > v_1$.
  La propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité**

  On suppose que $v_n > v_{n+1}$; c'est l'hypothèse de récurrence.

  $v_n > v_{n+1}$ donc $1 + v_n > 1 + v_{n+1}$

  Or la fonction ln est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ donc $\ln(1+v_n) > \ln(1+v_{n+1})$, ce qui veut dire que $v_{n+1} > v_{n+2}$. La propriété est donc héréditaire.
- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0. Elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a démontré que, pour tout $n \geqslant 0$, on avait : $v_n > v_{n+1}$; donc la suite (v_n) est décroissante.

Affirmation 3 vraie

4. On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \left[\ln(x)\right]^n \,\mathrm{d}x$.

Affirmation 4 : Pour tout entier naturel n, $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$.

$I_{n+1} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \left[\ln(x)\right]^{n+1} \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} 1 \times \left[\ln(x)\right]^{n+1} \mathrm{d}x$

On va calculer I_{n+1} au moyen d'une intégration par parties :

$\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$

On pose $u'(x) = 1$ donc $u(x) = x$, et $v(x) = \left[\ln(x)\right]^{n+1}$ donc $v'(x) = (n+1) \times \dfrac{1}{x} \times \left[\ln(x)\right]^n$.

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[x \times \left[\ln(x)\right]^{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x \times (n+1) \times \frac{1}{x} \times \left[\ln(x)\right]^n \mathrm{d}x \\ &= \left(\mathrm{e}\left[\ln(\mathrm{e})\right]^{n+1} - 1\left[\ln(1)\right]^{n+1}\right) - (n+1)\int_1^{\mathrm{e}} \left[\ln(x)\right]^n \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e} - (n+1)\,I_n \end{aligned}$$

Affirmation 4 vraie

Exercice 4 5 points

L'objectif de cet exercice est de déterminer la distance entre deux droites non coplanaires.

Soit (d_1) la droite passant par A$(1\,;\,2\,;\,-1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et (d_2) la droite dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0\\ y & = & 1+t\\ z & = & 2+t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

1. On a $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (d_1) \iff$ il existe $t' \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{\text{A}M} = t'\overrightarrow{u_1} \iff$

$\left\{\begin{array}{rcl} x-1 & = & 1t'\\ y-2 & = & 2t'\\ z-(-1) & = & 0t'\end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+t'\\ y & = & 2+2t'\\ z & = & -1\end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}.$

2. On démontre que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.

- (d_2) a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et ce vecteur n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{u_1}$: les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.
- (d_1) et (d_2) sont sécantes s'il existe t et t' deux réels tels que :

$\left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & 1+t'\\ 1+t & = & 1+t'\\ 2+t & = & -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -1 & = & t'\\ t & = & t'\\ t & = & -3\end{array}\right.$: ce système n'a pas de solution.

Conclusion : les deux droites ne sont ni parallèles ni sécantes, elles sont donc non coplanaires.

3. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

On va justifier qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $-2x+y+5z+5=0$.

Si un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient au plan défini par le point A et les deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{w}$, on sait que il existe α et β tels que : $\overrightarrow{\text{A}M} = \alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{w}$,

soit avec les coordonnées : $\left\{\begin{array}{rcl} x-1 & = & 1\alpha+2\beta\\ y-2 & = & 2\alpha-1\beta\\ z+1 & = & 0\alpha+1\beta\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \alpha+2\beta+1\\ y & = & 2\alpha-\beta+2\\ z & = & \beta-1\end{array}\right.$

Or quels que soient α et β :

$-2(\alpha+2\beta+1)+1(2\alpha-\beta+2)+5(\beta-1)+5 = -2\alpha-4\beta-2+2\alpha-\beta+2+5\beta-5+5=0.$

Donc une équation cartésienne du plan est $-2x+1y+5z+5=0$.

4. **a.** On a vu que (d_1) et (d_2) ne sont pas coplanaires donc (d_2) ne peut appartenir au plan précédent et (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles donc la droite (d_2) est sécante au plan $\mathscr{P}$.

Autre méthode : d'après ses équations paramétriques un vecteur directeur de la droite (d_2)est le vecteur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et d'après l'équation de $\mathscr{P}$ un de ses vecteurs normaux est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\5)\end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{u_2}\cdot\overrightarrow{n} = 0+1+5 = 6 \neq 0$ ceci montre que (d_2) n'est pas parallèle au plan $\mathscr{P}$: (d_2) et $\mathscr{P}$ sont donc sécants.

b. On note F le point d'intersection de la droite (d_2) et du plan $\mathscr{P}$.

Si F est commun à (d_2) et au plan $\mathscr{P}$ ses coordonnées vérifient le système :

$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ y &=& 1+t\\ z &=& 2+t\\ -2x+y+5z+5 &=& 0\end{array}\right.$, d'où en remplaçant dans la dernière équation :

$-2\times 0+1+t+5(2+t)+5 = 0 \iff 1+t+10+5t+5 = 0 \iff 6t+16 = 0 \iff t = -\dfrac{8}{3}$,

d'où en remplaçant dans $x, y,$ et z, on obtient $\text{F}\left(0\,;\,-\dfrac{5}{3}\,;\,-\dfrac{2}{3}\right)$.

Soit (δ) la droite passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$. On admet que les droites (δ) et (d_1) sont sécantes en un point E de coordonnées $\left(-\dfrac{2}{3}\,;\,-\dfrac{4}{3}\,;\,-1\right)$.

5. **a.** Des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{EF}}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ on déduit que :

$\overrightarrow{\text{EF}}\cdot\overrightarrow{u_1} = \dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}+0 = 0$ et $\overrightarrow{\text{EF}}\cdot\overrightarrow{u_2} = 0-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3} = 0$.

Conclusion : $\overrightarrow{\text{EF}}$ est orthogonal aux vecteurs directeurs des deux droites (d_1) et (d_2), $\text{E} \in (d_1)$ et $\text{F} \in (d_2)$ donc EF est bien la distance entre les droites (d_1) et (d_2).

b. On a $\text{EF}^2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9} = \dfrac{6}{9}$.

Conclusion : $\text{EF} = \sqrt{\dfrac{6}{9}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.