∽ Corrigé du baccalauréat Polynésie 19 juin 2024 ∾

A. P. M. E. P.

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée

Exercice 1 **4 points**

$$\mathrm{A}(2~;~1~;~-1),\quad \mathrm{B}(-1~;~2~;~1) \text{ et } \quad \mathrm{C}(5~;~0~;~-3).$$

On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne : $x+5y-2z+3=0$.

On note $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& -t+3\\ y &=& t+2\\ z &=& 2t+1\end{array}\right., t\in\mathbb{R}$.

Affirmation 1 :

On a $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\begin{pmatrix}5\\0\\-3\end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points O, A et C ne sont pas alignés et définissent bien un plan.

D'autre part : $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2+0-2=0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=5+0-6=-1$; conclusion le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ du plan (OAC) mais n'est pas orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ de ce même plan; il n'est donc pas normal au plan (OAC) : l'affirmation 1 est fausse.

Affirmation 2 :

On cherche la représentation paramétrique de (AB). On a :

$M(x~;~y~;~z)\in(\mathrm{AB}) \iff \overrightarrow{\mathrm{A}M}=u\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, avec $u\in\mathbb{R}$. Comme $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ on obtient :

$$M(x~;~y~;~z)\in(\mathrm{AB}) \iff \left\{\begin{array}{l c l} x-2 &=& -3u\\ y-1 &=& 1u\\ z+1 &=& 2u\end{array}\right., u\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{l c l} x &=& 2-3u\\ y &=& 1+u\\ z &=& -1+2u\end{array}\right., u\in\mathbb{R}.$$

$$\text{Donc } M(x~;~y~;~z)\in(\mathrm{AB})\cap\mathscr{D} \iff \left\{\begin{array}{l c l} 2-3u &=& 3-t\\ 1+u &=& 2+t\\ -1+2u &=& 1+2t\end{array}\right.$$

La deuxième équation donne $u=t+1$ et en remplaçant u par $t+1$ dans les deux autres on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{l c l} u &=& t+1\\ 2-3(t+1) &=& 3-t\\ -1+2(1+t) &=& 1+2t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} u &=& t+1\\ 2-3t-3 &=& 3-t\\ -1+2+2t &=& 1+2t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} u &=& t+1\\ -4 &=& 2t\\ 1 &=& 1\end{array}\right. :$$

d'où $t=-2$ et $u=t+1=-2+1=-1$.

En remplaçant t ou u dans l'une des équations paramétriques de (AB) ou (D) on obtient le point commun de coordonnées (5; 0; -3), donc le point C.

Conclusion : l'affirmation 2 est vraie.

Affirmation 3 :

Si un point $M(x~;~y~;~z)$ est commun à la droite $\mathscr{D}$ et au plan $\mathscr{P}$ ses coordonnées vérifient l'équation paramétrique de $\mathscr{D}$ et l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$, donc le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -t+3\\ y & = & t+2\\ z & = & 2t+1\\ x+5y-2z+3 & = & 0\end{array}\right., t\in\mathbb{R},$$

D'où en remplaçant dans l'équation du plan x, y et z par leurs valeurs en fonction de t :

$-t+3+5(t+2)-2(2t+1)+3=0 \iff -t+3+5t+10-4t-2+3=0 \iff 0t=-14$ cette équation n'a pas de solution : $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont parallèles (strictement) ; l'affirmation 3 est vraie

Affirmation 4 :

• Le milieu H de [BC] a pour coordonnées $\text{H}\left(\dfrac{-1+5}{2}\ ;\ \dfrac{2+0}{2}\ ;\ \dfrac{1-3}{2}\right)$, soit H(2 ; 1 ; −1).

$3x_{\text{H}}-y_{\text{H}}-2z_{\text{H}}-7=3\times2-1-2\times(-1)-7=0$ donc $\text{H}\in Q$.

• Le vecteur $\overrightarrow{\text{BC}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}5-(-1)\\0-2\\-3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-2\\-4\end{pmatrix}$.

Le plan Q a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{\text{BC}}=2\overrightarrow{v}$ donc le vecteur $\overrightarrow{\text{BC}}$ est normal au plan Q.

L'affirmation 4 est vraie.

Exercice 2 5 points

Soit (E) l'équation différentielle : $y'+0{,}02y=m$.

Partie A

1. On sait que l'équation différentielle $y'+0{,}02y=0$ a pour solutions les fonctions $t\longmapsto y=k\,\text{e}^{-0{,}02t}$, avec $k\in\mathbb{R}$.

   D'autre part une fonction constante $y=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$ est solution de (E) (avec donc $y'=0$) si $0+0{,}02\alpha=m \iff 0{,}02\alpha=m \iff \alpha=\dfrac{m}{0{,}02}=50m$.

   Conclusion : toutes les solutions de (E) sont les fonctions définies par

   $$t\longmapsto y=k\,\text{e}^{0{,}02t}+50m,\quad\text{avec } k\in\mathbb{R}$$

2. On sait que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\text{e}^{-0{,}02t}=0$, donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}k\,\text{e}^{-0{,}02t}=0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}k\,\text{e}^{-0{,}02t}+50m=50m$.

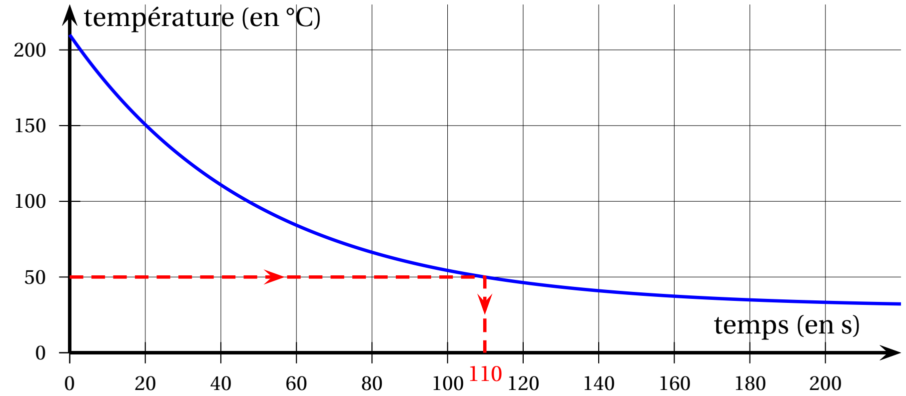
   Or on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}k\,\text{e}^{-0{,}02t}+50m=30$, donc $m=\dfrac{3}{5}=\dfrac{6}{10}=0{,}6$.
3. Avec $50m=50\times0{,}6=5\times6=30$, les solutions de (E) sont les fonctions f définies par : $t\longmapsto f(t)=k\,\text{e}^{-0{,}02t}+30$

   On a $f(0)=210 \iff k\times1+30=210 \iff k=180$.

   Finalement : $f(t)=180\,\text{e}^{-0{,}02t}+30$.

Partie B

Soit f la fonction définie par $f(t)=180\,\text{e}^{-0{,}02t}+30$.



1. **a.** On lit sur le graphique $T \approx 110$ (s).

   b. $f(T) = 50 \iff 180\,\mathrm{e}^{-0,02T} + 30 = 50 \iff 180\,\mathrm{e}^{-0,02T} = 20$

   $\iff 20 \times 9\,\mathrm{e}^{-0,02T} = 20 \times 1 \iff 9\,\mathrm{e}^{-0,02T} = 1 \iff \mathrm{e}^{-0,02T} = \dfrac{1}{9}$

   $\iff -0,02T = \ln\left(\dfrac{1}{9}\right)$ par croissance de la fonction logarithme népérien) $\iff -0,02T = -\ln 9 \iff 0,02T = \ln 9$

   $\iff T = \dfrac{\ln 9}{0,02}$

   Donc $T = \dfrac{\ln 9}{0,02} = 50\ln 9 \approx 109,86$.

2. La valeur moyenne $\overline{t}$ de la température sur les 100 premières secondes est :

   $\overline{t} = \dfrac{1}{100}\displaystyle\int_0^{100} \left(180\,\mathrm{e}^{-0,02t} + 30\right)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{100}\left[-\dfrac{180}{0,02}\,\mathrm{e}^{-0,02t} + 30t\right]_0^{100}$

   $= \dfrac{1}{100}\left[-9000\,\mathrm{e}^{-0,02t} + 30t\right]_0^{100} = \dfrac{1}{100}\left[-9000\,\mathrm{e}^{-2} + 9000 + 3\,000\right]$

   $= \dfrac{1}{100}\left[9000\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right) + 3\,000\right] = 90\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right) + 30 \approx 107,82$

   soit environ 107,8 (°C).

Exercice 3 — 5 points

Les probabilités demandées seront exprimées sous forme de fractions irréductibles

Partie A

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois, sur les trois lancers, où la pièce est retombée du côté « Face ».

1. On lance 3 fois une pièce de monnaie bien équilibrée donc il s'agit d'une répétition de 3 épreuves identiques et indépendantes; la variable aléatoire X qui compte le nombre de fois, sur les trois lancers, où la pièce est retombée du côté « Face » suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \dfrac{1}{2}$.

2. $P(X = 0) = \dbinom{3}{0}\left(\dfrac{1}{2}\right)^0\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^{3-0} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$

$$P(X=1)=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-1}=3\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{3}{8}$$
$$P(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-2}=3\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{3}{8}$$
$$P(X=3)=\binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{1}{8}$$

On complète le tableau donnant la loi de probabilité de X :

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Partie B

Voici les règles d'un jeu où le but est d'obtenir trois pièces du côté « Face » en un ou deux essais :

- On lance trois pièces équilibrées :
  - Si les trois pièces sont tombées du côté « Face », la partie est gagnée ;
  - Sinon, les pièces tombées du côté « Face » sont conservées et on relance celles tombées du côté « Pile ».
- La partie est gagnée si on obtient trois pièces du côté « Face », sinon elle est perdue.

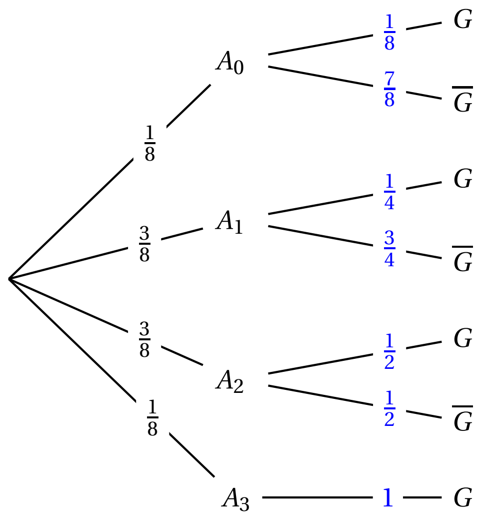
On considère les évènements suivants :

- G : « la partie est gagnée ».

  Et pour tout entier k compris entre 0 et 3, les évènements :
- A_k : « k pièces sont tombées du côté « Face » au premier lancer ».

1. $P_{A_1}(G)$ est la probabilité de l'événement « on a gagné sachant que lors du premier lancer, on a obtenu une fois « Face ». C'est donc la probabilité qu'au deuxième lancer, les deux pièces tombent sur « Face ».

   Il y a 4 résultats équiprobables possibles : PP - PF - FP - FF, dont un seul favorable ; la probabilité cherchée est donc égale à $\frac{1}{4}$.
2. On complète l'arbre pondéré ci-dessous :



3. D'après la loi des probabilités totales on a :

$$p = P(A_0) \times P_{A_0}(G) + P(A_1) \times P_{A_1}(G) + P(A_2) \times P_{A_2}(G) + P(A_3) \times P_{A_3}(G)$$
$$= \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \times 1 = \frac{1+6+12+8}{64} = \frac{27}{64}$$

4. La partie a été gagnée. La probabilité qu'exactement une pièce soit tombée du côté « Face » à la première tentative est :

$$P_G(A_1) = \frac{P(A_1 \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{3}{8} \times \frac{1}{4}}{\frac{27}{64}} = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{27}{64}} = \frac{3}{32} \times \frac{64}{27} = \frac{2}{9}.$$

5. Les parties sont à chaque fois indépendantes et la probabilité de gagner est à chaque fois égale à $\frac{27}{64}$. Pour n parties jouées, on appelle Z la variable aléatoire comptant le nombre de parties gagnées, Z suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{27}{64}$.

$$P(Z=0) = \binom{n}{0} \times \left(\frac{27}{64}\right)^0 \times \left(1 - \frac{27}{64}\right)^n = \left(\frac{37}{64}\right)^n \text{ donc } P(Z \geqslant 1) = 1 - \left(\frac{37}{64}\right)^n.$$

Il faut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(Z \geqslant 1) > 0{,}95$.

On résout donc l'inéquation :

$$\begin{aligned}
1 - \left(\frac{37}{64}\right)^n > 0{,}95 &\iff \left(\frac{37}{64}\right)^n < 0{,}05 \\
&\iff \ln\left(\left(\frac{37}{64}\right)^n\right) < \ln(0{,}05) \text{ (croissance de la fonction ln)} \\
&\iff n \ln\left(\frac{37}{64}\right) < \ln(0{,}05) \\
&\iff n > \frac{\ln(0{,}05)}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)} \text{ car } \frac{1}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)} < 0
\end{aligned}$$

Or la calculatrice donne $\frac{\ln(0{,}05)}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)} \approx 5{,}46$. Il faut donc faire au moins 6 parties.

Exercice 4 — 6 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{4}{5 - u_n}$.

Partie A

1. On complète la fonction Python suivante `suite(n)` qui prend comme paramètre le rang n et renvoie la valeur du terme u_n.

```
def suite(n):
    u = 3
    for i in range(n) :
        u = 4/(5 - u)
    return u
```

2. À la première boucle on trouve $u_1 = \dfrac{4}{5-3} = \dfrac{4}{2} = 2$.

À la seconde on trouve $u_2 = \dfrac{4}{5-2} = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}333$.

3. À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite (u_n).

```
» suite(2)
1.3333333333333333
» suite(5)
1.0058479532163742
» suite(10)
1.0000057220349845
» suite(20)
1.000000000005457
```

Les affichages successifs sont des approximations de u_2, u_5, u_{10}, u_{20} et leur examen laisse à conjecturer que la la limite de la suite est égale à 1.

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$ par : $f(x) = \dfrac{4}{5-x}$.

Ainsi, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. La fonction f quotient de fonctions dérivables sur $]-\infty\,;\,5[$, de dénominateur non nul puisque $x \neq 5$, est dérivable et sur cet intervalle :

$f'(x) = \dfrac{0 - 4 \times (-1)}{(5-x)^2} = \dfrac{4}{(5-x)^2}$

Quotient de deux carrés cette dérivée est strictement positive, donc la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,5[$.

2. Soit la propriété : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$.

Initialisation : on a vu que $u_1 = 2$ et on a $u_0 = 3$, donc $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 4$.

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$: ces nombres étant rangés dans l'ordre croissant leur images par f fonction strictement croissante pour des réels plus petits que 4, sont rangées dans le même ordre, soit $f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(4)$.

Comme $f(1) = \dfrac{4}{5-1} = 1$ et $f(4) = \dfrac{4}{5-4} = 4$, on obtient $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire ; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$.

3. **a.** Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty~;~5[$.

On a pour $x < 5$:

$f(x) = x \iff \dfrac{4}{5-x} = x \iff 4 = x(5-x) \iff 4 = 5x - x^2 \iff x^2 - 5x + 4 = 0.$

b. Résoudre $f(x) = x$ dans l'intervalle $]-\infty~;~5[$, revient d'après la question précédente à résoudre l'équation du second degré $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Les racines de cette équation 1 et 4 sont évidentes (sinon on calcule le discriminant), donc :

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \iff (x-1)(x-4) = 0 \iff \left[\begin{array}{ccc} x-1 & = & 0 \\ & \text{ou} & \\ x-4 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ccc} x & = & 1 \\ & \text{ou} & \\ x & = & 4 \end{array}\right.$$

La solution 4 est vraisemblable puisque $x \leqslant 4$, on a donc $S = \{1~;~4\}$.

4. L'encadrement démontré par récurrence montre deux choses : pour tout $n \in \mathbb{N}$

- $u_{n+1} \leqslant u_n$ signifie que la suite (u_n) est décroissante ;
- $1 \leqslant u_n$ signifie que la suite (u_n) est minorée par 1.

La suite (u_n) décroissante et minorée par 1 est donc convergente vers un réel $\ell \geqslant 1$.

Par continuité de la fonction trinôme la limite ℓ est solution de l'équation précédente et cette solution est 1 ou 4, mais on a vu que $u_0 = 3$ et la suite étant décroissante la solution 4 est à rejeter..

Conclusion : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

La suite (u_n) converge vers 1.

5. Avec $u_0 = 4$, on a $u_1 = \dfrac{4}{5-4} = \dfrac{4}{1} = 4$ et donc en répétant le calcul $u_n = 4$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Dans ce cas la suite est constante : tous ses termes sont égaux à 4, elle converge vers 4.