Baccalauréat Asie 5 septembre 2025

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1 — 5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-2x}.$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' la dérivée de la fonction f.
On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée.
Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1. Pour tout réel x, on a $f'(x) = (-2x+1)\mathrm{e}^{-2x}$.

Affirmation 2. La fonction f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y' + 2y = \mathrm{e}^{-2x}.$$

Affirmation 3. La fonction f est convexe sur $]-\infty\,;\,1]$.

Affirmation 4. L'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

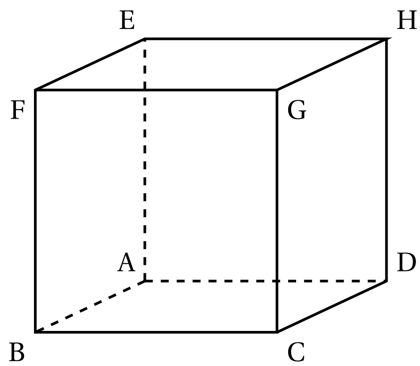
Affirmation 5. L'aire du domaine délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $\dfrac{1}{4} - \dfrac{3\mathrm{e}^{-2}}{4}$.

Exercice 2 — 5 points

« *Dans un triangle non équilatéral, la droite d'Euler est la droite qui passe par les trois points suivants* :

- *le centre du cercle circonscrit à ce triangle (cercle passant par les trois sommets de ce triangle).*
- *le centre de gravité de ce triangle situé à l'intersection des médianes de ce triangle.*
- *l'orthocentre de ce triangle situé à l'intersection des hauteurs de ce triangle* ».

Le but de l'exercice est d'étudier un exemple de droite d'Euler.
On considère un cube ABCDEFGH de côté une unité.
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.
On note I le milieu du segment [AB] et J le milieu du segment [BG].



1. Donner sans justification les coordonnées des points A, B, G, I et J.

2. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AJ).

   b. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IG) est :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}t \\ y = \qquad t \\ z = \qquad t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

   c. Démontrer que les droites (AJ) et (IG) sont sécantes en un point S de coordonnées $S\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\right)$.

3. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\,(0\ ;\ -1\ ;\ 1)$ est normal au plan (ABG).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABG).

   c. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (d) de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ et passant par le point K de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 1\right)$ est :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \quad -t \\ z = 1 + t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

   Montrer que cette droite (d) coupe le plan (ABG) en un point L de coordonnées $L\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

   d. Montrer que le point L est équidistant des points A, B et G.

4. Montrer que le triangle ABG est rectangle en B.

5. **a.** Identifier le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et l'orthocentre du triangle ABG (aucune justification n'est attendue).

   b. Vérifier par un calcul que ces trois points sont effectivement alignés.

Exercice 3 — 4,75 points

Dominique répond à un QCM comportant 10 questions.
Pour chaque question, il est proposé 4 réponses dont une seule est exacte.
Dominique répond au hasard à chacune des 10 questions en cochant, pour chaque question, exactement une case parmi les 4.
Pour chacune des questions, la probabilité qu'il réponde correctement est donc $\dfrac{1}{4}$.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses à ce QCM.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X et donner les paramètres de cette loi.

2. Quelle est la probabilité que Dominique obtienne exactement 5 bonnes réponses ? Arrondir le résultat à 10^{-4} près.

3. Donner l'espérance de X et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

4. On suppose dans cette question qu'une bonne réponse rapporte un point et qu'une mauvaise réponse fait perdre 0,5 point. La note finale peut donc être négative.

On note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de points obtenus.

a. Calculer $P(Y = 10)$, on donnera la valeur exacte du résultat.

b. À partir de combien de bonnes réponses la note finale de Dominique est-elle positive ? Justifier.

c. Calculer $P(Y \leqslant 0)$, on donnera une valeur approchée au centième.

d. Montrer que $Y = 1,5X - 5$.

e. Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y.

Exercice 4 5,25 points

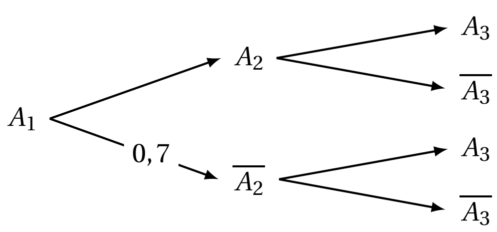
Soit n un entier naturel non nul.
Dans le cadre d'une expérience aléatoire, on considère une suite d'évènements A_n et on note p_n la probabilité de l'évènement A_n.
Pour les parties **A** et **B** de l'exercice, on considère que :

- Si l'évènement A_n est réalisé alors l'évènement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,3.
- Si l'évènement A_n n'est pas réalisé alors l'évènement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,7.

On suppose que $p_1 = 1$.

Partie A :

1. Recopier et compléter les probabilités sur les branches de l'arbre des probabilités ci-dessous :



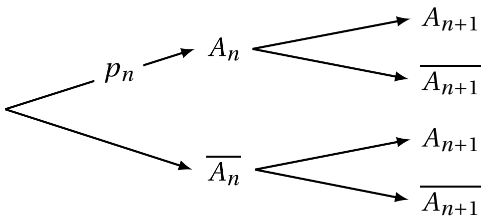
2. Montrer que $p_3 = 0,58$.

3. Calculer la probabilité conditionnelle $P_{A_3}(A_2)$, arrondir le résultat à 10^{-2} près.

Partie B :

Dans cette partie, on étudie la suite (p_n) avec $n \geqslant 1$.

1. Recopier et compléter les probabilités sur les branches de l'arbre des probabilités ci-dessous :



2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = -0,4p_n + 0,7$.

On considère la suite $\left(u_n\right)$, définie pour tout entier naturel n non nul par :

$u_n = p_n - 0,5$.

b. Montrer que $\left(u_n\right)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c. En déduire l'expression de u_n, puis de p_n en fonction de n.

d. Déterminer la limite de la suite $\left(p_n\right)$.

Partie C :

Soit $x \in]0\,;\,1[$, on suppose que $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = P_{A_n}\left(\overline{A_{n+1}}\right) = x$. On rappelle que $p_1 = 1$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = (1-2x)p_n + x$.

2. Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n non nul :

$$p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

3. Montrer que la suite $\left(p_n\right)$ est convergente et donner sa limite.