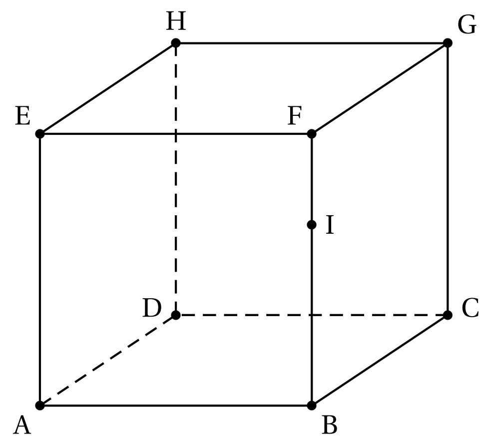
Baccalauréat Nouvelle-Calédonie 21 novembre 2025
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ Jour 2

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège »est autorisé.
La qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 — 4 points

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1 et le point I défini par $\overrightarrow{FI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FB}$.
On pourra se placer dans le repère orthonormé de l'espace $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.



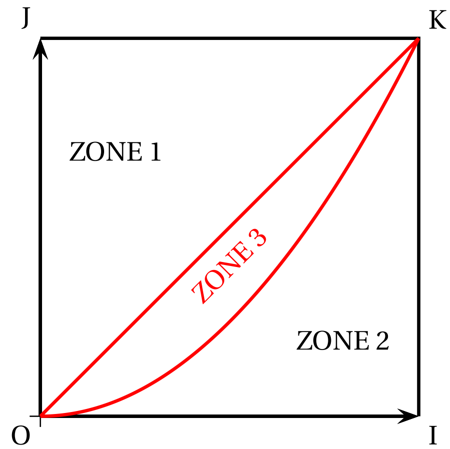
1. On considère le triangle HAC.
   Affirmation 1 : Le triangle HAC est un triangle rectangle.
2. On considère les droites (HF) et (DI).
   Affirmation 2 : Les droites (HF) et (DI) sont sécantes.
3. On considère un réel α appartenant à l'intervalle $]0\,;\,\pi[$.
   On considère le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}\sin(\alpha)\\ \sin(\pi-\alpha)\\ \sin(-\alpha)\end{pmatrix}$.
   Affirmation 3 : Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal au plan (FAC).
4. Le cube ABCDEFGH possède 8 sommets. On s'intéresse au nombre N de segments que l'on peut construire en reliant 2 sommets distincts quelconques du cube.
   Affirmation 4 : $N = \dfrac{8^2}{2}$.

Exercice 2 **6 points**

Dans le repère orthonormé (O ; I, J) ci-contre, on a représenté :

- la droite d'équation $y = x$;
- la droite d'équation $y = 1$;
- la droite d'équation $x = 1$;
- la parabole d'équation $y = x^2$.

On peut ainsi partager le carré OIKJ en trois zones.



Les parties B *et* C *peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre*

Partie A

Démontrer les résultats figurant dans le tableau ci-dessous.

ZONE	ZONE 1	ZONE 2	ZONE 3
AIRE	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Partie B : un premier jeu

Un joueur lance une fléchette sur le carré ci-dessus. On admet que la probabilité qu'elle tombe sur une zone est égale à l'aire de cette zone. Ainsi, la probabilité que la fléchette tombe sur la ZONE 3 est égale à $\frac{1}{6}$.

- Si la fléchette tombe sur la ZONE 3, alors le joueur lance une pièce équilibrée.
  Si la pièce tombe sur PILE, alors le joueur gagne, sinon il perd.
- Si la fléchette tombe sur une autre zone que la ZONE 3, alors le joueur lance un dé équilibré à six faces. Si le dé tombe sur la FACE 6, alors le joueur gagne, sinon il perd.

On note les évènements suivants :

T : « la fléchette tombe sur la ZONE 3 » ;

G : « le joueur gagne ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\frac{2}{9}$.
3. On sait que le joueur a gagné. Quelle est la probabilité que la fléchette soit tombée sur la ZONE 3 ?

Partie C : un second jeu

Un joueur, appelé joueur $n^{\text{o}}\,1$, lance une fléchette sur le carré précédent. Comme dans la partie B, on admet que la probabilité que la fléchette tombe sur chacune des zones est égale à l'aire de cette zone.
Le joueur gagne une somme égale, en euros, au numéro de la zone. Par exemple, si la fléchette tombe sur la ZONE 3, le joueur gagne 3 euros.
On note X_1 la variable aléatoire donnant le gain du joueur $n^{\text{o}}\,1$.
On note respectivement $E(X_1)$ et $V(X_1)$ l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_1.

1. **a.** Calculer $E(X_1)$.
   b. Montrer que $V(X_1) = \dfrac{5}{9}$.
2. Un joueur $n^{\text{o}}\,2$ et un joueur $n^{\text{o}}\,3$ jouent à leur tour, dans les mêmes conditions que le joueur $n^{\text{o}}\,1$. On admet que les parties de ces trois joueurs sont indépendantes les unes des autres.
   On note X_2 et X_3 les variables aléatoires donnant les gains des joueurs $n^{\text{o}}\,2$ et $n^{\text{o}}\,3$. On note Y la variable aléatoire définie par $Y = X_1 + X_2 + X_3$.
   a. Déterminer la probabilité que l'on ait $Y = 9$.
   b. Calculer $E(Y)$.
   c. Justifier que $V(Y) = \dfrac{5}{3}$.

Exercice 3 — 5 points

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 2\right)$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \ln(9)$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(2\ln(2)) = 2\ln(2)$.
3. Montrer que $u_1 = \ln(5)$.
4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$2\ln(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$

5. En déduire que la suite (u_n) converge.
6. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 - X - 2 = 0$.
   b. En déduire l'ensemble des solutions sur R de l'équation :

$$\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$$

   c. En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = x$.
   d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} + 1$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
En déduire les éventuelles asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

4. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution, notée α, sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

b. Donner un encadrement du réel α d'amplitude $0,01$.

c. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x)$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé d'origine O. On considère un réel x strictement positif et le point M de la courbe C_g d'abscisse x. On note OM la distance entre les points O et M.

a. Exprimer la quantité OM^2 en fonction du réel x.

b. Montrer que, lorsque le réel x parcourt l'intervalle $]0~;~+\infty[$, la quantité OM^2 admet un minimum en α.

c. La valeur minimale de la distance OM, lorsque le réel x parcourt l'intervalle $]0~;~+\infty[$, est appelée distance du point O à la courbe $\mathscr{C}_g$. On note d cette distance.
Exprimer d à l'aide de α.