Corrigé du baccalauréat Amérique du Sud 14 novembre 2025

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ Jour 2

Exercice 1 — 6 points

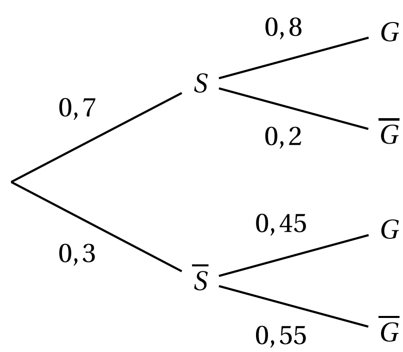
Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} *près en cas de besoin.*
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes l'une de l'autre.

Partie A

Au tennis, le joueur qui est au service peut, en cas d'échec lors du premier service, servir une deuxième balle.
En match, Abel réussit son premier service dans 70 % des cas. Lorsque le premier service est réussi, il gagne le point dans 80 % des cas.
En revanche, après un échec à son premier service, Abel gagne le point dans 45 % des cas.
Abel est au service.
On considère les évènements suivants :

- S : « Abel réussit son premier service » ;
- G : « Abel gagne le point ».

1. $\overline{S}$ est l'événement : « Abel ne réussit pas son premier service. ».
   On traduit la situation par un arbre pondéré.



2. $P(S \cap G) = P(S) \times P_S(G) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$
3. $\left\{S, \overline{S}\right\}$ forme une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales, on a : $P(G) = P(S \cap G) + P\left(\overline{S} \cap G\right) = 0,56 + 0,3 \times 0,45 = 0,695$
4. Abel a gagné le point. La probabilité qu'il ait réussi son premier service est :
   $P_G(S) = \dfrac{P(S \cap G)}{P(G)} = \dfrac{0,56}{0,695} \approx 0,806$
5. On a :
   - $P(S \cap G) = 0,56$
   - $P(S) \times P(G) = 0,7 \times 0,695 = 0,4865$

   $P(S \cap G) \neq P(S) \times P(G)$ donc les événements S et G ne sont pas indépendants.

Partie B

À la sortie d'une usine de fabrication de balles de tennis, une balle est jugée conforme dans 85 % des cas.

1. On teste successivement 20 balles. On considère que le nombre de balles est suffisamment grand pour assimiler ces tests à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de balles conformes parmi les 20 testées.

   a. L'épreuve élémentaire consiste à voir si une balle est conforme, avec une probabilité de $0,85$, ou si elle ne l'est pas.

   On exécute cette épreuve élémentaire 20 fois et on considère que le nombre de balles est suffisamment grand pour assimiler ces tests à un tirage avec remise.

   Donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de balles conformes parmi les 20 testées, suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,85$.

   b. À la calculatrice, $P(X \leqslant 18) \approx 0,824$.

   c. La probabilité qu'au moins deux balles ne soient pas conformes parmi les 20 balles testées est égale à la probabilité qu'au plus 18 balles soient conformes, c'est-à-dire $P(X \leqslant 18)$ soit environ $0,824$.

   d. L'espérance de X est $E(X) = np = 20 \times 0,85 = 17$.

2. On teste maintenant n balles successivement. On considère les n tests comme un échantillon de n variables aléatoires X indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $0,85$.

   On considère la variable aléatoire $M_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} = \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \frac{X_3}{n} + \ldots + \frac{X_n}{n}$

   a. D'après le cours, on peut dire que les n variables aléatoires X indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,85$ ont pour espérance $p = 0,85$ et pour variance $p\left(1-p\right) = 0,85 \times 0,15 = 0,1275$.

   Soit S_n la loi somme définie par $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

   - D'après la linéarité de l'espérance, on a :
     $E\left(S_n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} 0,85 = 0,85n$
   - Les variables X_i étant indépendantes, on utilise l'additivité de la variance :
     $V\left(S_n\right) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V\left(X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} 0,1275 = 0,1275n$

   M_n est la loi moyenne définie par $M_n = \frac{S_n}{n}$.

   - On sait que $E(aX) = aE(X)$, donc :
     $E\left(M_n\right) = E\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n}\,E\left(S_n\right) = \frac{0,85n}{n} = 0,85$.
   - On sait que $V(aX) = a^2V(X)$ donc :
     $V\left(M_n\right) = V\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n^2}\,V\left(S_n\right) = \frac{0,1275n}{n^2} = \frac{0,1275}{n}$.

   b. Si X est une variable aléatoire et t un réel strictement positif, on a :
   $P\left(\left|X - E(X)\right| \geqslant t\right) \leqslant \frac{V(X)}{t^2}$. C'est l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

On en déduit que : $P\left(\left|X-E(X)\right|<t\right)\geqslant 1-\dfrac{V(X)}{t^2}$. Donc :

$$\begin{aligned}P\left(\left|X-E(X)\right|<t\right)\geqslant 1-\dfrac{V(X)}{t^2} &\iff P\left(\left|M_n-E(M_n)\right|<t\right)\geqslant 1-\dfrac{V(M_n)}{t^2}\\ &\iff P\left(\left|M_n-0,85\right|<t\right)\geqslant 1-\dfrac{0,1275}{nt^2}\end{aligned}$$

On prend $t=0,1$. On a donc :

- $\left|M_n-0,85\right|<t \iff \left|M_n-0,85\right|<0,1 \iff -0,1<M_n-0,85<0,1$
  $\iff 0,75<M_n<0,95$
- $1-\dfrac{0,1275}{nt^2}=1-\dfrac{0,1275}{n\times 0,1^2}=1-\dfrac{12,75}{n}$

On déduit donc : $P(0,75<M_n<0,95)\geqslant 1-\dfrac{12,75}{n}$.

c. Pour trouver un entier n tel que la moyenne du nombre de balles conformes pour un échantillon de taille n appartienne à l'intervalle $]0,75\,;\,0,95\,[$ avec une probabilité supérieure à 0,9, il suffit que : $1-\dfrac{12,75}{n}\geqslant 0,9$. On résout cette inéquation.

$1-\dfrac{12,75}{n}\geqslant 0,9 \iff 0,1\geqslant\dfrac{12,75}{n} \iff 0,1n\geqslant 12,75 \iff n\geqslant 127,5$

Donc il faut un échantillon de taille supérieure à $n=128$ pour que la moyenne du nombre de balles conformes appartenant à l'intervalle $]0,75\,;\,0,95[$ ait une probabilité supérieure à 0,9

Exercice 2 — 4points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Dans toutes les questions suivantes, l'espace est rapporté à un repère orthonormé.

1. • Δ_1 a pour vecteur directeur $\delta_1\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$ et Δ_2 a pour vecteur directeur $\delta_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$: les premières coordonnées ne sont pas égales, les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, les droites Δ_1 et Δ_2 ne sont pas parallèles;

   En remplaçant respectivement dans les équations paramétriques s par 2 et t par 1, on trouve que le point de coordonnées $(-2\,;\,6\,;\,1)$ appartient bien aux deux droites.

2. **a.** $M(x=1+2t\,;\;y=3-t\,;\;z=1+2t)\in d$ appartient à P si ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de P, donc si

   $4(1+t)+2(3-t)-(1+2t)+3=0 \iff 4+4t+6-2t-1-2t+3=0 \iff 0t+12=0 \iff 0t=-12$: cette équation n'a pas de solution : cela signifie que la droite d est parallèle strictement au plan P.

3. On considère les points A(3; 2; 1), B(7; 3 ; 1), C(−1 ; 4 ; 5) et D(−3 ; 3 ; 5).

Commençons par la deuxième affirmation : on a

$\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{\text{CD}}\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

Il reste donc la première affirmation que l'on peut démontrer :

A, B, C et D sont coplanaires, c'est-à-dire si par exemple D appartient au plan (ABC) et dans ce cas si $\overrightarrow{\text{AD}} = x\overrightarrow{\text{AB}} + y\overrightarrow{\text{AC}}$, avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ (car $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ ne sont pas des vecteurs colinéaires.

Avec $\overrightarrow{\text{AD}}\begin{pmatrix}-6\\1\\4\end{pmatrix}$, l'égalité vectorielle précédente se traduit par le système :

$$\left\{\begin{array}{lcr}-6&=&4x-4y\\1&=&x+2y\\4&=&4y\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr}-6&=&4x-4\\1&=&x+2\\1&=&y\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr}-2&=&4x\\-1&=&x\\1&=&y\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr}-\frac{1}{2}&=&x\\-1&=&x\\1&=&y\end{array}\right.$$

Ce système n'a pas de solution. Donc le point D n'appartient pas au plan défini par les points A, B et C ou encore A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

4. **a.** $\text{R}(1~;~1~;~-2) \in (Q) \iff 3\times 1 + -2\times 1 - 2 + 1 = 0 \iff 3-2-2+1=0$ qui est vraie ;
$\text{R}(1~;~1~;~-2) \in (Q') \iff 4\times 1 + 1\times 1 - (-2) + 3 = 0 \iff 10 = 0$ qui est fausse : la première affirmation est fausse ;

b. (Q) a pour vecteur normal $\overrightarrow{q}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$; (Q') a pour vecteur normal $\overrightarrow{q'}\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{q'} = 3\times 4 - 2\times 1 + 1\times(-1) = 12-2-1 = 9 \neq 0$: les vecteurs normaux ne sont pas orthogonaux, les plans (Q) et (Q') ne sont pas perpendiculaires.

c. Les points communs aux deux plans sont les points dont les coordonnées vérifient les équations de ces deux plans donc le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl}3x-2y+z+1&=&0\\4x+y-z+3&=&0\end{array}\right.$$

On peut poser $x = t$, avec $t \in \mathbb{R}$ et on obtient le système aux deux inconnues y et z suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl}x&=&t\\3x-2y+z+1&=&0\\4x+y-z+3&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&t\\-2y+z&=&-3t-1\\y-z&=&-4t-3\end{array}\right.$$

La somme membre à membre des deux dernières équations donne

$-y = -7t-4 = 0 \iff y = 7t+4$;

enfin la deuxième équation $-2y+z = -3t-1$ donne $z = 2y-3t-1 = 2(7t+4) - 3t-1 = 14t+8-3t-1 = 11t+7$.

Conclusion : les points communs aux deux plans sont les points dont les coordonnées vérifient le système : $\left\{\begin{array}{lcr}x&=&t\\y&=&7t+4\\z&=&11t+7\end{array}\right.$, où $t \in \mathbb{R}$: c'est l'équation de la droite contenant le point K(0 ; 4 ; 7) et dont un vecteur directeur est le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\7\\11\end{pmatrix}$. : la troisième affirmation est vraie.

Exercice 3 — 4 points

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & \ln(4)\\ v_{n+1} & = & \ln\left(-1+2\mathrm{e}^{v_n}\right)\end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad w_n = (-1+\mathrm{e}^{v_n}.$$

On admet que la suite (v_n) est bien définie et strictement positive.

1. • $v_1 = \ln\left(-1+2\mathrm{e}^{v_0}\right) = \ln\left(-1+2\mathrm{e}^{\ln 4}\right) = \ln(-1+2\times 4) = \ln(-1+8) = \ln 7$ (valeur approchée ligne 4 colonne 3)

• $w_0 = -1+\mathrm{e}^{v_0} = -1+\mathrm{e}^{\ln 4} = -+4 = 3$ (valeur ligne 3 colonne 4)

2. **a.** Il faut saisir la formule 2.

b. On peut penser que la suite (v_n) est croissante

c. Démonstration par récurrence :

Initialisation : on a $v_0 = \ln 4$ et $v_1 = \ln 7$: la croissance de la fonction ln assure que $v_0 < v_1$.

Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n < v_{n+1}$, alors :

$\mathrm{e}^{v_n} < \mathrm{e}^{v_{n+1}}$ par croissance de la fonction exponentielle

$2\mathrm{e}^{v_n} < 2\mathrm{e}^{v_{n+1}}$ la multiplication par +2 respecte l'ordre

$-1+2\mathrm{e}^{v_n} < -1+2\mathrm{e}^{v_{n+1}}$ l'addition respecte l'ordre

$\ln\left(-1+2\mathrm{e}^{v_n}\right) < \ln\left(-1+2\mathrm{e}^{v_{n+1}}\right)$ par croissance de la fonction logarithme népérien (on a supposé que la suite (v_n) est bien définie donc que tous les nombres de la forme $-1+2\mathrm{e}^{v_n}$ sont supérieurs à zéro) ; soit finalement

$v_{n+1} < v_{n+2}$: l'inégalité est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle l'est aussi au rang suivant : d'après le principe de récurrence :

$$\text{quel que soit } n \in \mathbb{N}, \quad v_n < v_{n+1}$$

La suite (v_n) est croissante.

3. **a.** Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -1+\mathrm{e}^{v_n}$, donc

$w_{n+1} = -1+\mathrm{e}^{v_{n+1}} = -1+\mathrm{e}^{\ln(-1+2\mathrm{e}^{v_n})} = -1-1+2\mathrm{e}^{v_n} = -2+2\mathrm{e}^{v_n} = 2\left(-1+\mathrm{e}^{v_n}\right)$: finalement

Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 2w_n$: cette égalité montre que la suite w_n est géométrique de raison 2 avec pour premier terme $w_0 = 3$.

b. On sait qu'alors le terme général w_n est égal à :

$$w_n = 3\times 2^n$$

Or par définition $w_n = -1+\mathrm{e}^{v_n} = 3\times 2^n \iff \mathrm{e}^{v_n} = 1+3\times 2^n$.

Par croissance de la fonction logarithme népérien : $v_n = \ln\left(1+3\times 2^n\right)$ pour tout entier naturel.

c. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\times 2^n = +\infty$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+3\times 2^n = +\infty$ et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+3\times 2^n\right) = +\infty$.
Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

4. L'algorithme permet de calculer les termes de la suite v_n à partir de v_0. On vient de démontrer que la suite (v_n) n'est pas majorée. Donc quel que soit le choix du nombre S, il existe un rang p, tel que $v_p > S$ et l'algorithme donnera ce rang p.

Exercice 4 — 6 points

Partie A : dénombrement

On considère l'ensemble des nombres entiers relatifs **non nuls** compris entre -30 et 30 ; cet ensemble peut s'écrire ainsi : $\{-30\ ;\ -29\ ;\ -28\ ;\ \dots -1\ ;\ 1\ ;\ \dots\ ;\ 28\ ;\ 29\ ;\ 30\}$. Il comporte 60 éléments.
On choisit dans cet ensemble successivement et sans remise un entier relatif a puis un entier relatif c.

1. On peut choisir comme premier terme du couple entre 60 entiers ; comme il n'y a pas de remise (???) et que $(a\ ;\ b) \neq (b\ ;\ a)$, le deuxième terme peut être choisi entre 59 entiers.

On peut donc obtenir $60\times 59 = 3\,540$ couples différents.

2. L'équation a deux racines si le déterminant est supérieur à zéro, donc si :
$\Delta = 4-4ac > \iff (4(1-ac) > \iff 1-ac > 0 \iff ac < 1$.

3. Il faut donc trouver le nombre de couples vérifiant $ac \geqslant 1$, mais en fait $ac > 1$ puisque l'on ne peut avoir $(-1\ ;\ -1)$ ni $(1\,;\,1)$.

Si l'on choisit en premier un entier négatif (30 choix) le second terme sera choisi dans les 29 entiers négatifs restant, soit $30\times 29 = 870$ couples ;

Même chose si les deux termes choisis sont positifs, soit 870 couples.

L'évènement $\overline{M}$ sera réalisé pour $870+870 = 1\,740$ couples.

4. D'après le résultat précédent l'évènement M sera réalisé pour $3\,540-1\,740 = 1\,800$ couples.

Donc $p(M) = \dfrac{1\,800}{3\,540} = \dfrac{30}{59} \approx 0{,}508\,4$ soit 0,508 au millième près.

Partie B : équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E):\quad y' + 10y = \left(30x^2+22x-8\right)\mathrm{e}^{-5x+1} \quad \text{avec} \quad x\in\mathbb{R}$$

où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. L'équation différentielle est équivalente à l'équation $y' = -10y$.

On sait que les solutions de cette équation sont les fonctions définies par
$x \longmapsto f(x) = C\mathrm{e}^{-10x}$, avec $C\in\mathbb{R}$.

2.

$$f(x) = \left(6x^2+2x-2\right)\mathrm{e}^{-5x+1}.$$

Étant admis que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on calcule :

$f'(x) = (12x+2)\mathrm{e}^{-5x+1} + (-5)\left(6x^2+2x-2\right)\mathrm{e}^{-5x+1} = \mathrm{e}^{-5x+1}\left[12x+2-30x^2-10x+10)\right] = \mathrm{e}^{-5x+1}\left(-30x^2+2x+12\right)$.

Alors $f'(x) + f(x) = \mathrm{e}^{-5x+1}\left(-30x^2+2x+12\right) + 10\left(6x^2+2x-2\right)\mathrm{e}^{-5x+1} = \mathrm{e}^{-5x+1}\left(-30x^2+2x+12+60x^2+20x-20\right) = \mathrm{e}^{-5x+1}\left(30x^2+22x-8\right)$.

On a donc bien démontré que f est une solution de l'équation différentielle (E).

3. Les résultats précédents permettent d'énoncer que toutes les solutions de (E) sont la somme de f et des solutions de l'équation $y' + 10y = 0$, soit

Toutes les solutions de (E) sont de la forme $\left(6x^2+2x-2\right)\mathrm{e}^{-5x+1} + C\mathrm{e}^{-10x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Partie C : étude de fonction

On rappelle que, pour tout réel x, $f(x) = \left(6x^2+2x-2\right)\mathrm{e}^{-5x+1}$.

1. On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

On a $6x^2+2x-2 = x^2\left(6+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2} = 0$, donc

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 6+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2} = 6$.

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$,

Enfin on sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-5x+1} = +\infty$ on a finalement :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

2. On sait que quel que soit le réel $-5x+1$, $\quad \mathrm{e}^{-5x+1} > 0$: le signe de $f(x)$ est donc celui du trinôme $6x^2+2x-2$.

Le trinôme vérifie l'évènement M puisque avec $a = 6$ et $c = -2$, $\quad ac = -12 < 1$. Le trinôme s'annule donc pour deux réels distincts : géométriquement $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points.

Non demandé : $\Delta = 4+48 = 52 = 4\times 13$.

Les racines sont donc $x_1 = \dfrac{2+\sqrt{52}}{12} = \dfrac{1+\sqrt{13}}{6} \approx 0,77$ et $x_2 = \dfrac{2-\sqrt{52}}{12} = \dfrac{1-\sqrt{13}}{6} \approx -0,43$

3. On a vu en **A . 2.** que $f'(x) = \mathrm{e}^{-5x+1}\left(-30x^2+2x+12\right)$; comme on sait que quel que soit le réel $-5x+1$, $\mathrm{e}^{-5x+1} \neq 0$, donc $f'(x) = 0 \iff -30x^2+2x+12 = 0 \iff -15x^2+x+6 = 0$. Comme $\Delta = (-1)^2 - 4\times(-15)\times 6 = 361 = 19^2 > 0$, ce trinôme s'annule pour $x_1 = \dfrac{-1+19}{-30} = -\dfrac{18}{30} = -\dfrac{3}{5}$ et $x_2 = \dfrac{-1-19}{-30} = \dfrac{20}{30} = \dfrac{2}{3}$.

Aux points d'abscisse $-\dfrac{3}{5}$ et $\dfrac{2}{3}$, le nombre dérivé est nul ce qui signifie que la tangente en ces deux points est horizontale.

4. Avec $f\left(-\dfrac{3}{5}\right) \approx -56,8$ et $f\left(\dfrac{2}{3}\right) \approx 0,19$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$\approx -56,8$	$\nearrow$	$\approx 0,19$	$\searrow$	0

5. Sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{5}\right[$, la fonction f décroit de plus l'infini à environ $-56,8$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel α de cet intervalle tel que $f(\alpha) = 1$.

Sur l'intervalle $\left]-\dfrac{3}{5}\,;\,+\infty\right[$, $f(x) \leqslant 0,19 < 1$: il n'existe pas de solution de l'équation $f(x) = 1$ sur cet intervalle.

Conclusion : sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 1$ a une solution.

6. Pour tout réel m strictement supérieur à 0,2, on définit I_m par $I_m = \displaystyle\int_{0,2}^{m} f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. F est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: sur cet intervalle :

$F'(x) = \left(-\dfrac{12}{5}x - \dfrac{22}{25}\right)\mathrm{e}^{-5x+1} - 5\left(-\dfrac{6}{5}x^2 - \dfrac{22}{25}x + \dfrac{28}{125}\right)\mathrm{e}^{-5x+1} =$
$\mathrm{e}^{-5x+1}\left(-\dfrac{12}{5}x - \dfrac{22}{25} + 6x^2 + \dfrac{22}{5}x - \dfrac{28}{25}\right) = \left(6x^2 - \dfrac{10}{5}x - -\dfrac{50}{25}\right)\mathrm{e}^{-5x+1} =$
$\left(6x^2 - 2x + 2\right)\mathrm{e}^{-5x+1} = f(x)$.

Sur $\mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$ montre que F est une primitive de la fonction f.

b. On a donc $I_m = \displaystyle\int_{0,2}^{m} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{0,2}^{m} = F(m) - F(0,2)$.

Or $F(0,2) = F\left(\dfrac{1}{5}\right) = \left(-\dfrac{6}{5} \times \dfrac{1}{25} - \dfrac{22}{25} \times \dfrac{1}{5} + \dfrac{28}{125}\right)\mathrm{e}^{-5\times\frac{1}{5}+1} = \left(-\dfrac{28}{125} + \dfrac{28}{125}\right)\mathrm{e}^{0} =$
$0 \times 1 = 0$.

Il faut donc résoudre l'équation $F(m) = 0$ soit $\left(-\frac{6}{5}m^2 - \frac{22}{25}m + \frac{28}{125}\right)\mathrm{e}^{-5m+1} = 0 \iff$
$-\dfrac{6}{5}m^2 - \dfrac{22}{25}m + \dfrac{28}{125} = 0$, car quel que soit $m \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-5m+1} > 0$.

On étudie donc le trinôme $-\dfrac{6}{5}m^2 - \dfrac{22}{25}m + \dfrac{28}{125}$ ou encore $-150m^2 - 110m + 28$ en multipliant par 125, et en simplifiant par 2 le trinôme : $-75m^2 - 55m + 14$.

Pour ce trinôme $\Delta = (-55)^2 - 4 \times (-75) \times 14 = 7\,225 = 85^2 > 0$.

Ce trinôme a deux racines $m_1 = \dfrac{55 + 85}{-150} = -\dfrac{140}{150} = -\dfrac{14}{15}$ et $m_2 = \dfrac{55 - 85}{-150} = \dfrac{-30}{-150} =$
$\dfrac{1}{5} = 0,2$.

La deuxième solution a déjà été trouvée ci-dessus ($F(0,2) = 0$).

Il existe donc une autre valeur $-\dfrac{14}{15}$ telle que $F\left(-\dfrac{14}{15}\right) = 0$ mais cette solution est négative alors que l'on demande une solution supérieure à 0,2 donc positive.

Interprétation graphique

On a tracé les représentations graphiques des fonctions f et F.

La surface limitée par la représentation graphique de f, $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = 0,2$ et $x = m$ est égale à l'intégrale I_m.

Cette surface se compose de deux parties :

— une première partie correspondant à l'intégrale de 0,2 à environ 0,43 (valeur qui annule f) ; la courbe étant sous l'axe des abscisses l'aire est l'opposée de l'intégrale ;

— une deuxième partie correspondant à l'intégrale de 0,43 à m ; la courbe étant au dessus de l'axe des abscisses l'aire est égale à l'intégrale.

On a trouvé qu'il n'existe pas de valeur de m telle que I_m s'annule signifie géométriquement que quel que soit $m > 0,2$, l'aire de la surface située au dessus de l'axe des abscisses n'est pas égale à l'aire de la surface située sous l'axe des abscisses.

On voit aussi que pour $m > 0,2$ aucun point de la représentation de F (en rouge) n'a une ordonnée nulle.