Corrigé du baccalauréat Asie 5 septembre 2025

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1 — 5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-2x}$.

On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$ et on note f' la dérivée de la fonction f.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

Affirmation 1. Pour tout réel x, on a $f'(x) = (-2x+1)\,\mathrm{e}^{-2x}$.

$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-2x}$ donc $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-2x} + x \times (-2)\,\mathrm{e}^{-2x} = (-2x+1)\,\mathrm{e}^{-2x}$.

Affirmation 1 vraie

Affirmation 2. La fonction f est une solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2y = \mathrm{e}^{-2x}$.

$f'(x) + 2f(x) = (-2x+1)\,\mathrm{e}^{-2x} + 2x\,\mathrm{e}^{-2x} = -2x\,\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-2x} + 2x\,\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x}$

Affirmation 2 vraie

Affirmation 3. La fonction f est convexe sur $]-\infty\,;\,1]$.

$f'(x) = (-2x+1)\,\mathrm{e}^{-2x}$ donc $f''(x) = (-2) \times \mathrm{e}^{-2x} + (-2x+1) \times (-2)\,\mathrm{e}^{-2x} = (4x-4)\,\mathrm{e}^{-2x}$.

On étudie le signe de $f''(x)$ sur $\mathbf{R}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$4x-4$		$-$	0	$+$	
e^{-2x}		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		concave		convexe	

Affirmation 3 fausse

Affirmation 4. L'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $\mathbf{R}$.

On détermine le signe de $f'(x) = (-2x+1)\,\mathrm{e}^{-2x}$ sur $\mathbf{R}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-2x+1$		$+$	0	$-$	
e^{-2x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Valeurs remarquables

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-2x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
- $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2\times\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-1} > 0$
- $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-2x} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{\mathrm{e}^{2x}}$; par croissance comparée, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{\mathrm{e}^{2x}} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

On établit le tableau des variations de f sur $\mathbf{R}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	0

- Sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right]$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-1} > 0$. Or $-1 \in \left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-1}\right]$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right]$.
- Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, la fonction f est strictement positive donc l'équation $f(x) = -1$ n'admet aucune solution sur cet intervalle.

Donc l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $\mathbf{R}$.

Affirmation 4 vraie

Affirmation 5. L'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $\dfrac{1}{4} - \dfrac{3\,\mathrm{e}^{-2}}{4}$.

L'aire du domaine est égale à $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$.

On utilise une intégration par parties : $\displaystyle\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)\,v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$.

On pose $\left\{\begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-2x} \end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x} \end{array}\right.$

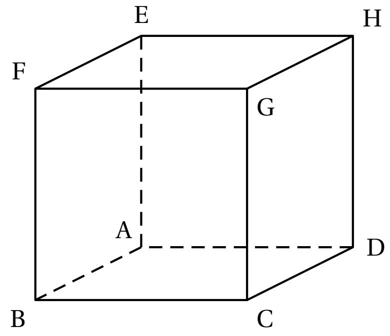
$$\mathscr{A} = \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left[x \times \left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{x\,\mathrm{e}^{-2x}}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^1$$

$$= \left[-\frac{\mathrm{e}^{-2}}{2} - 0\right] - \left[\frac{\mathrm{e}^{-2}}{4} - \frac{\mathrm{e}^{0}}{4}\right] = \frac{1}{4} - \frac{3\,\mathrm{e}^{-2}}{4}$$

Affirmation 5 vraie

Exercice 2 5 points

Le but de l'exercice est d'étudier un exemple de droite d'Euler.
On considère un cube ABCDEFGH de côté une unité.
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}}\,;\,\overrightarrow{\text{AD}}\,;\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.
On note I le milieu du segment [AB] et J le milieu du segment [BG].



1. On donne les coordonnées des points A, B, G, I et J :

A $(0\,,\,0\,,\,0)$; B $(1\,,\,0\,,\,0)$; G $(1\,,\,1\,,\,1)$; I $\left(\dfrac{1}{2}\,,\,0\,,\,0\right)$; J $\left(1\,,\,\dfrac{1}{2}\,,\,\dfrac{1}{2}\right)$

2. **a.** La droite (AJ) est l'ensemble des points M$\left(x\,,\,y\,,\,z\right)$ tels que $\overrightarrow{\text{AM}}$ et $\overrightarrow{\text{AJ}}$ soient colinéaires, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{\text{AM}} = k.\overrightarrow{\text{AJ}}$ avec $k \in \mathbf{R}$.

$\overrightarrow{\text{AM}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_\text{M} - x_\text{A} \\ y_\text{M} - y_\text{A} \\ z_\text{M} - z_\text{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et celles de $\overrightarrow{\text{AJ}}$ sont $\begin{pmatrix} x_\text{J} - x_\text{A} \\ y_\text{J} - y_\text{A} \\ z_\text{J} - z_\text{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\text{AM}} = k.\overrightarrow{\text{AJ}} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k.\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& k \\ y &=& \frac{k}{2} \\ z &=& \frac{k}{2} \end{array}\right.$$

La droite (AJ) a donc pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& k \\ y &=& \frac{k}{2} \\ z &=& \frac{k}{2} \end{array}\right.$ avec $k \in \mathbf{R}$

b. $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y &=& t \\ z &=& t \end{array}\right.$ $(t \in \mathbf{R})$ est la représentation paramétrique d'une droite passant par le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,,\,0\,,\,0\right)$, c'est-à-dire le point I, et ayant le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

$\overrightarrow{\text{IG}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_\text{G} - x_\text{I} \\ y_\text{G} - y_\text{I} \\ z_\text{G} - z_\text{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ 1 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y &=& t \\ z &=& t \end{array}\right.$ $(t \in \mathbf{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (IG).

c. Les droites (AJ) et (IG) sont sécantes si et seulement si on peut trouver un couple de réels $(k\,,\,t)$ tel que $\left\{\begin{array}{rcl} k &=& \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}k &=& t \\ \frac{1}{2}k &=& t \end{array}\right.$. On résout ce système.

$$\left\{\begin{array}{l c l} k &=& \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\\ \frac{1}{2}k &=& t\\ \frac{1}{2}k &=& t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} k &=& \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\\ k &=& 2t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} 2t &=& \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\\ k &=& 2t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} \frac{3}{2}t &=& \frac{1}{2}\\ k &=& 2t\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l c l} t &=& \frac{1}{3}\\ k &=& \frac{2}{3}\end{array}\right.$$

Donc les droites (AJ) et (IG) sont sécantes. Pour $k=\frac{2}{3}$, on a $\left\{\begin{array}{l c l} k &=& \frac{2}{3}\\ \frac{1}{2}k &=& \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2}k &=& \frac{1}{3}\end{array}\right.$

Le point S d'intersection des droites (AJ) et (IG) a donc pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,,\,\frac{1}{3}\,,\,\frac{1}{3}\right)$.

3. **a.** Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(0\,;\,-1\,;\,1)$.

$\overrightarrow{\text{AB}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AG}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{AB}}=0\times 1+(-1)\times 0+1\times 0=0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{\text{AB}}$.
- $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{AG}}=0\times 1+(-1)\times 1+1\times 1=0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{\text{AG}}$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AG}}$ ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (ABG).

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABG), donc $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABG).

b. Le plan (ABG) est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,,\,y\,,\,z)$ tels que $\overrightarrow{\text{AM}}$ et $\overrightarrow{n}$ soient orthogonaux, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{\text{AM}}\cdot\overrightarrow{n}=0$.

$\overrightarrow{\text{AM}}\cdot\overrightarrow{n}=0 \iff x\times 0+y\times(-1)+z\times 1=0 \iff -y+z=0$

Le plan (ABG) a pour équation cartésienne : $-y+z=0$.

c. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (d) de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ et passant par le point K de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)$ est : $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\\ y=-t\\ z=1+t\end{array}\right.\quad (t\in\mathbf{R})$.

S'il existe, le point d'intersection de la droite (d) et du plan (ABG), est solution du système : $\left\{\begin{array}{r c l} x &=& \frac{1}{2}\\ y &=& -t\\ z &=& 1+t\\ -y+z &=& 0\end{array}\right.$

Il faut donc que : $-(-t)+(1+t)=0$ soit $2t+1=0$ ou encore $t=-\frac{1}{2}$.

Pour $t=-\frac{1}{2}$, on a $x=\frac{1}{2}$, $y=-t=\frac{1}{2}$ et $z=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Donc la droite (d) coupe le plan (ABG) au point L de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right)$.

d. On calcule les distances LA, LB et LG.

- $\text{LA}^2=(x_{\text{A}}-x_{\text{L}})^2+(y_{\text{A}}-y_{\text{L}})^2+(z_{\text{A}}-z_{\text{L}})^2$
  $=\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

  donc $\text{LA}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\text{LB}^2=(x_{\text{B}}-x_{\text{L}})^2+(y_{\text{B}}-y_{\text{L}})^2+(z_{\text{B}}-z_{\text{L}})^2$
  $=\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

donc $\text{LB} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- $\text{LG}^2 = (x_G - x_L)^2 + (y_G - y_L)^2 + (z_G - z_L)^2$
$= \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

donc $\text{LG} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc le point L est équidistant des points A, B et G.

4. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-1\\1-0\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BG} = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BG}$ donc le triangle ABG est rectangle en B.

5. **a.** Points remarquables du triangle ABG.

- (AJ) et (IG) sont deux médianes du triangle ABG et elles se coupent en S ; donc le point S est le centre de gravité du triangle ABG.
- Le point L est équidistant des points A, B et G donc c'est le centre du cercle circonscrit au triangle ABG.
- Le triangle ABG est rectangle en B donc B est son orthocentre.

b. $\overrightarrow{BS}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{2}{3}-1\\\frac{1}{3}-0\\\frac{1}{3}-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BL}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-1\\\frac{1}{2}-0\\\frac{1}{2}-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BL}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BS}$ et $\overrightarrow{BL}$ sont colinéaires et donc les points B, S et L sont alignés.

Exercice 3 — 4,75 points

Dominique répond à un QCM comportant 10 questions. Pour chaque question, il est proposé 4 réponses dont une seule est exacte. Dominique répond au hasard à chacune des 10 questions en cochant, pour chaque question, exactement une case parmi les 4. Pour chacune des questions, la probabilité qu'il réponde correctement est donc $\frac{1}{4}$.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses à ce QCM.

1. Pour chaque question, il y a deux issues possibles : Dominique donne la bonne réponse, avec une probabilité $p = \frac{1}{4}$, ou Dominique donne une mauvaise réponse.

On effectue cette expérience élémentaire 10 fois et de façon indépendante.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de bonnes réponses à ce QCM suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{4}$.

2. La probabilité que Dominique obtienne exactement 5 bonnes réponses est :

$P(X = 5) = \binom{10}{5} \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{10-5} \approx 0{,}0584$

3. L'espérance de X est $E(X) = np = 10 \times \frac{1}{4} = 2{,}5$.

En procédant comme Dominique, un élève aura en moyenne 2,5 bonnes réponses.

4. On suppose dans cette question qu'une bonne réponse rapporte un point et qu'une mauvaise réponse fait perdre 0,5 point. La note finale peut donc être négative.

On note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de points obtenus.

a. Pour réaliser l'évènement $(Y = 10)$, il faut que toutes les réponses soient justes donc : $P(Y = 10) = P(X = 10) = \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$.

b. On peut calculer la valeur de Y en fonction de celle de X

- On a vu que $(Y = 10)$ équivalait à $(X = 10)$.
- Si $X = 9$, il y a 9 bonnes réponses qui rapportent 9 points, et une mauvaise réponse qui en retire un demi; donc $Y = 8,5$.
- Si $X = 8$, il y a 8 bonnes réponses qui rapportent 8 points, et deux mauvaises réponses qui retirent deux demi-points; donc $Y = 7$.
- Etc.

On regroupe tous les résultats possibles dans un tableau.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	-5	$-3,5$	-2	$-0,5$	1	2,5	4	5,5	7	8,5	10

Donc la note finale de Dominique est positive à partir de 4 bonnes réponses.

c. D'après le tableau précédent, $P(Y \leqslant 0) = P(X \leqslant 3)$.

Donc $P(Y \leqslant 0) \approx 0,78$.

d. X prend toutes les valeurs entières entre 0 et 10.

Pour X bonnes réponses qui rapportent X points, il y en a $10 - X$ mauvaises qui retirent $0,5(10 - X)$ points.

Donc $Y = X - 0,5(10 - X) = X - 5 + 0,5X = 1,5X - 5$.

e. D'après la linéarité de l'espérance mathématique, on a :

$E(Y) = E(1,5X - 5) = 1,5 \times E(X) - 5 = 1,5 \times 2,5 - 5 = -1,25$.

Exercice 4 — 5,25 points

Soit n un entier naturel non nul.

Dans le cadre d'une expérience aléatoire, on considère une suite d'évènements A_n et on note p_n la probabilité de l'évènement A_n.

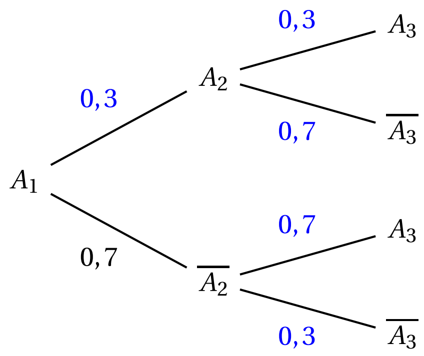
Pour les parties **A** et **B** de l'exercice, on considère que :

- Si l'évènement A_n est réalisé alors l'évènement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,3.
- Si l'évènement A_n n'est pas réalisé alors l'évènement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,7.

On suppose que $p_1 = 1$.

Partie A :

1. On complète l'arbre des probabilités ci-dessous :



2. $\left\{A_2\,,\,\overline{A_2}\right\}$ forme une partition donc, d'après la formule des probabilités totales :

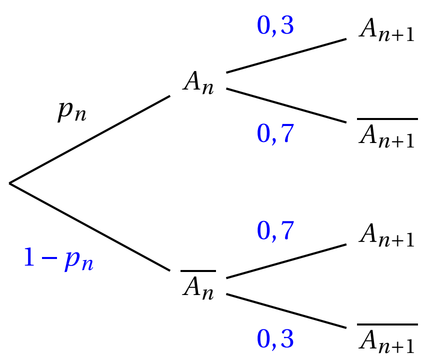
$$P\left(A_3\right)=P\left(A_2\cap A_3\right)+P\left(\overline{A_2}\cap A_3\right)=P\left(A_2\right)\times P_{A_2}\left(A_3\right)+P\left(\overline{A_2}\right)\times P_{\overline{A_2}}\left(A_3\right)$$
$$=0,3\times 0,3+0,7\times 0,7=0,58$$

3. $P_{A_3}\left(A_2\right)=\dfrac{P\left(A_2\cap A_3\right)}{P\left(A_3\right)}=\dfrac{0,3\times 0,3}{0,58}\approx 0,16$

Partie B :

Dans cette partie, on étudie la suite $\left(p_n\right)$ avec $n\geqslant 1$.

1. On complète l'arbre des probabilités ci-dessous :



2. **a.** $\left\{A_n\,,\,\overline{A_n}\right\}$ forme une partition donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1}=P\left(A_{n+1}\right)=P\left(A_n\cap A_{n+1}\right)+P\left(\overline{A_n}\cap A_{n+1}\right)$$
$$=P\left(A_n\right)\times P_{A_n}\left(A_{n+1}\right)+P\left(\overline{A_n}\right)\times P_{\overline{A_n}}\left(A_{n+1}\right)$$
$$=p_n\times 0,3+\left(1-p_n\right)\times 0,7=0,3p_n+0,7-0,7p_n=-0,4p_n+0,7$$

On considère la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n=p_n-0,5$.
Donc $p_n=u_n+0,5$.

b. $u_{n+1}=p_{n+1}-0,5=-0,4p_n+0,7-0,5=-0,4\left(u_n+0,5\right)+0,2=-0,4u_n-0,2+0,2$
$=-0,4u_n$

$u_1=p_1-0,5=1-0,5=0,5$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q=-0,4$ et de premier terme $u_1=0,5$.

c. On en déduit que, pour tout n, on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0,5 \times (-0,4)^{n-1}$.

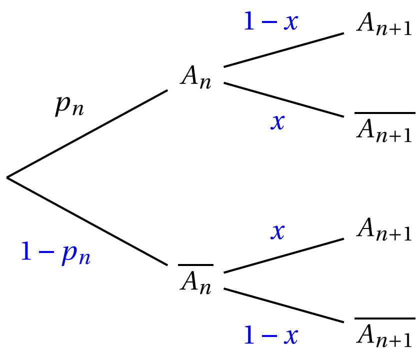
Et donc $p_n = u_n + 0,5 = 0,5 \times (-0,4)^{n-1} + 0,5$.

d. On a : $-1 < -0,4 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0,4)^{n-1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,5$.

Partie C :

Soit $x \in]0\,;\,1[$, on suppose que $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = P_{A_n}\left(\overline{A_{n+1}}\right) = x$. On rappelle que $p_1 = 1$.

On représente cette situation par un arbre de probabilités.



1. $\left\{A_n\,,\,\overline{A_n}\right\}$ forme une partition donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_{n+1} = P\left(A_{n+1}\right) &= P\left(A_n \cap A_{n+1}\right) + P\left(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\right) \\ &= P\left(A_n\right) \times P_{A_n}\left(A_{n+1}\right) + P\left(\overline{A_n}\right) \times P_{\overline{A_n}}\left(A_{n+1}\right) \\ &= p_n \times (1-x) + \left(1-p_n\right) \times x = p_n - xp_n + x - xp_n = (1-2x)\,p_n + x \end{aligned}$$

2. On va démontrer par récurrence que $p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

- **Initialisation**

  Pour $n = 1$, on a $\frac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

  Or $p_1 = 1$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$.
- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie au rang n c'est-à-dire que $p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$; c'est l'hypothèse de récurrence.

  $$\begin{aligned} p_{n+1} &= (1-2x)\,p_n + x = (1-2x)\left(\frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}\right) + x \\ &= (1-2x) \times \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + (1-2x) \times \frac{1}{2} + x = \frac{1}{2}(1-2x)^n + \frac{1}{2} - x + x \\ &= \frac{1}{2}(1-2x)^n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 1$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier n non nul.

On a donc démontré par récurrence sur n que $p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

3. $0 < x < 1$ donc $-2 < -2x < 0$ et donc $-1 < 1-2x < 1$.

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} (1-2x)^{n-1} = 0$ donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{2}$.