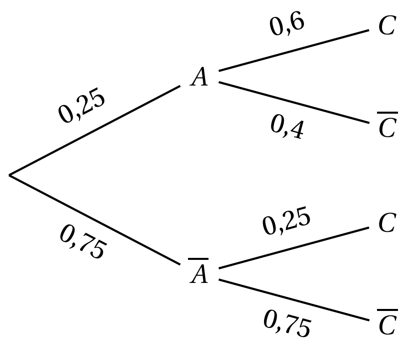
Corrigé du baccalauréat spécialité Nouvelle Calédonie Jour 1

20 novembre 2025

Exercice 1 **5 points**

1. On complète l'arbre représentant la situation.



2. L'évènement « Le joueur obtient une boule avec la lettre A et un billet de 50 euros » est $\{A \cap C\}$.

$$P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C) = 0{,}25 \times 0{,}6 = \boxed{0{,}15}$$

3. Les évènements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A \cap C) + P\left(\overline{A} \cap C\right) = P(A) \times P_A(C) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(C) \\ &= 0{,}15 + 0{,}75 \times 0{,}25 = 0{,}15 + 0{,}187\,5 \\ &= \boxed{0{,}337\,5} \end{aligned}$$

4. On doit calculer la probabilité $P_{\overline{C}}\left(\overline{A}\right)$:

$$P_{\overline{C}}\left(\overline{A}\right) = \frac{P\left(\overline{A} \cap \overline{C}\right)}{P\left(\overline{C}\right)} = \frac{P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}\left(\overline{C}\right)}{1 - P(C)} = \frac{0{,}75 \times 0{,}75}{1 - 0{,}337\,5} = \frac{0{,}562\,5}{0{,}662\,5} = \frac{45}{53} \approx 0{,}85.$$

La probabilité que le joueur ait pris une boule avec la lettre B sachant qu'il a obtenu un billet de 10 euros est environ 85 %. L'affirmation est donc vraie.

5. La loi de probabilité de X_1 est donnée par le tableau suivant :

k_i	10	50
$P(X_1 = k_i)$	0,662 5	0,337 5

L'espérance de X_1 est donc :

$$E(X_1) = 10 \times 0{,}662\,5 + 50 \times 0{,}337\,5 = 6{,}625 + 16{,}875 = \boxed{23{,}5}.$$

La variance de X_1 est donc :

$$\begin{aligned} V(X_1) &= E\left(X_1^2\right) - [E(X_1)]^2 = (100 \times 0{,}662\,5 + 2\,500 \times 0{,}337\,5) - 23{,}5^2 \\ &= 66{,}25 + 843{,}75 - 552{,}25 = \boxed{357{,}75}. \end{aligned}$$

6. **a.** On sait que l'espérance d'une somme de variables aléatoires est égale à la somme des espérances ; or X_1 et X_2 suivent la même loi, donc :

$$E(Y) = 2 \times E(X_1) = 2 \times 23{,}5 = \boxed{47}.$$

b. Puisque la boule et le billet ont été remis, les deux tirages sont indépendants, donc les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes. Or on sait que la variance de la somme de deux variables aléatoires indépendantes est égale à la somme de leurs variances (propriété de l'additivité). On a donc :

$$\boxed{V(Y) = V(X_1) + V(X_2)} \text{ et donc } \boxed{V(Y) = 2 \times 357{,}75 = 715{,}5}$$

7. Le joueur joue de même une troisième, une quatrième,..., une centième partie.
On définit donc de la même façon les variables aléatoires X_3, X_4,..., X_{100}.
On note Z la variable aléatoire définie par $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$.
Pour les mêmes raisons que dans la question précédente, on a :

- $E(Z) = E\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{100} X_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{100} (E(X_k)) = 100 \times 23{,}5 = 2\,350$
- $V(Z) = V\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{100} X_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{100} (V(X_k)) = 100 \times 357{,}75 = 35\,775$

Pour tout réel t strictement positif, on a : $P\left(\left|Z - E(Z)\right| \geqslant t\right) \leqslant \dfrac{V(Z)}{t^2}$.
C'est l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
On en déduit que : $P\left(\left|Z - E(Z)\right| < t\right) \geqslant 1 - \dfrac{V(Z)}{t^2}$. Donc : $P\left(\left|Z - 2\,350\right| < t\right) \geqslant 1 - \dfrac{35\,775}{t^2}$
$\left|Z - 2\,350\right| < t \iff 2\,350 - t < Z < 2\,350 + t$
Or on cherche $P\left(Z \in \left]1\,950\,;\,2\,750\right[\right)$ donc on prendra $t = 400$.
On aura donc : $P\left(Z \in \left]1\,950\,;\,2\,750\right[\right) \geqslant 1 - \dfrac{35\,775}{400^2}$.
$1 - \dfrac{35\,775}{400^2} \approx 0{,}776 \geqslant 0{,}75$. Donc la probabilité que Z appartienne à l'intervalle $]1\,950\,;\,2\,750[$ est supérieure ou égale à 0,75.

Exercice 2 **4 points**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{\text{k}}\right)$, on considère les points :

$$\text{A}(4\,;\,-4\,;\,4),\quad \text{B}(5\,;\,-3\,;\,2),\quad \text{C}(6\,;\,-2;\,;\,3),\quad \text{D}(5;\,1;\,1)$$

1. On a : $\overrightarrow{\text{AB}} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ -3-(-4) \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{CB}} = \begin{pmatrix} 5-6 \\ -3-(-2) \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Donc : $\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{CB}} = 1 \times (-1) + 1 \times (-1) - 2 \times (-1) = -1 - 1 + 2 = 0$.
Puisque leur produit scalaire est nul, les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{CB}}$ sont orthogonaux, donc le triangle ABC est rectangle en B.

2. D'après la question précédente, les points A, B et C étant non alignés, ils définissent bien un plan. Leurs coordonnées vérifient donc toute équation cartésienne du plan ainsi défini.
Or on a : $4-(-4)-8 = 4+4-8 = 0$, donc les coordonnées de A vérifient l'équation $x-y-8 = 0$.
De même $5-(-3)-8 = 5+3-8 = 0$ et $6-(-2)-8 = 6+2-8 = 0$, donc les coordonnées de B et C vérifient également l'équation $x - y - 8 = 0$.
Donc $x - y - 8 = 0$ est bien une équation cartésienne du plan (ABC).

3. **a.** On sait que si $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à un plan, alors ce plan a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$. Or on a vu à la question précédente que $x - y - 8 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC), donc $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Puisque d est orthogonale au plan (ABC), le vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d. De plus, la droite d passe par le point D (5 ; 1 ; 1).
Donc une représentation paramétrique de d est :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 5+t \\ y & = & 1-t \\ z & = & 1 \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.}$$

b. Puisque la droite d est orthogonale au plan (ABC) et passe par D, le projeté orthogonal H de D sur (ABC) est le point d'intersection de la droite D et du plan (ABC). Les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ du point H vérifient donc à la fois la représentation paramétrique de d et l'équation cartésienne de (ABC). Elles sont donc solution du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 5+t \\ y & = & 1-t \\ z & = & 1 \\ x-y-8 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow 5 + t - (1 - t) - 8 = 0 \iff 2t - 4 = 0 \iff 2t = 4 \iff t = 2$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 5+2 = 7 \\ y & = & 1-2 = -1 \\ z & = & 1 \end{array}\right.$$

Les coordonnées du projeté orthogonal H de D sur (ABC) sont donc :

$$\boxed{\text{H}\,(7\ ;\ -1\ ;\ 1)}$$

c. $\text{DH} = \sqrt{(7-5)^2 + (-1-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2}}$

4. **a.** La pyramide ABCD admet pour base le triangle ABC et pour hauteur le segment [DH].
On a donc $V = \dfrac{1}{3} \times \text{aire}\,(\text{ABC}) \times \text{DH}$.
Puisque ABC est rectangle en B, on a :

$$\begin{aligned} \text{aire}\,(\text{ABC}) &= \frac{\text{AB} \times \text{CB}}{2} = \frac{\|\overrightarrow{\text{AB}}\| \times \|\overrightarrow{\text{CB}}\|}{2} \\ &= \frac{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} \times \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{1+1+4} \times \sqrt{1+1+1}}{2} = \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{18}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$V = \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}\sqrt{2}}{\cancel{2}} \times \cancel{2}\sqrt{2} = \boxed{2}$$

Le volume de la pyramide ABCD est 2.

b. La distance du point A au plan (BCD) est la longueur de la hauteur issue de A de la pyramide ABCD. Soit x cette distance. On a alors $V = \frac{1}{3} \times \text{aire}\,(\text{BCD}) \times x$. Donc :

$$\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{42}}{2} \times x = 2 \iff x\sqrt{42} = 2 \times 3 \times 2 \iff x = \frac{12}{\sqrt{42}} = \frac{2 \times 6}{\sqrt{6} \times \sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{7}} = \boxed{\frac{2\sqrt{42}}{7}}$$

La distance du point A au plan (BCD) est $\frac{2\sqrt{42}}{7}$.

Exercice 3 **6 points**

On considère n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0~;~1]$ par : $f_n(x) = x^n\,\mathrm{e}^{1-x}$.

Partie A

1. $f_1(x) = x\,\mathrm{e}^{1-x}$ donc $f_1'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{1-x} + x \times \left(-\mathrm{e}^{1-x}\right) = \boxed{(1-x)\,\mathrm{e}^{1-x}}$

   On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{e}^{1-x} > 0$, donc $f_1'(x)$ est du signe de $1-x$. Or, $1 - x \geqslant 0 \iff x \leqslant 1$. Donc, pour tout $x \in [0~;~1[$, $f_1'(x)$ est strictement positif.

2.

x	0	1
Signe de $f_1(x)$	$+$	
Variations de f_1	0 ↗	1

$$f_1(0) = 0 \times \mathrm{e}^{1-0} = 0$$

$$f_1(1) = 1 \times \mathrm{e}^{1-1} = \mathrm{e}^0 = 1$$

3. La fonction f_1 est continue (puisque dérivable) et strictement croissante sur $[0~;~1]$, avec $f_1(0) = 0 < 0{,}1$ et $f_1(1) = 1 > 0{,}1$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_1(x) = 0{,}1$ admet une solution unique dans $[0~;~1]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

On admet que $u_1 = \mathrm{e} - 2$.

1. **a.** Pour $x \in [0~;~1]$, on a : $0 \leqslant x \leqslant 1$.

   $x \geqslant 0$ donc $x^n \geqslant 0$; on multiplie l'inégalité précédente par x^n :

   $0 \times x^n \leqslant x \times x^n \leqslant 1 \times x^n \iff 0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n$

   On a donc démontré que pour tout entier naturel n, on a :

$$\boxed{0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n}$$

b. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{1-x} > 0$, donc, d'après la question précédente :

$$0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n \iff 0 \leqslant x^{n+1}\,\mathrm{e}^{1-x} \leqslant x^n\,\mathrm{e}^{1-x}.$$

Donc, d'après la positivité de l'intégration :

$$0 \leqslant x^{n+1}\,\mathrm{e}^{1-x} \leqslant x^n\,\mathrm{e}^{1-x} \implies 0 \leqslant \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \iff \boxed{0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n}$$

c. D'après la question précédente, puisque $u_{n+1} \leqslant u_n$ la suite (u_n) est décroissante.
De plus, puisque $0 \leqslant u_n$, elle est minorée par 0.
Donc, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite positive ou nulle.

2. **a.** On sait que pour u et v dérivables on a : $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$.
Posons $u'(x) = \mathrm{e}^{1-x}$ et $v(x) = x^{n+1}$. Alors $u(x) = -\mathrm{e}^{1-x}$ et $v'(x) = (n+1)x^n$.
On a donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x &= \left[-x^{n+1}\,\mathrm{e}^{1-x}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n\left(-\mathrm{e}^{1-x}\right)\mathrm{d}x\\ &= -1^{n+1}\,\mathrm{e}^{1-1} - \left(-0^{n+1}\,\mathrm{e}^{1-0}\right) - (n+1)\int_0^1 -x^n\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x\\ &= -1 + (n+1)\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{u_{n+1} = (n+1)u_n - 1}.$$

b. On complète le script Python en bleu ci-dessus pour que la fonction `suite()` renvoie la valeur de $\displaystyle\int_0^1 x^8\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x$.

```python
from math import exp

 def  suite() :
      u = exp(1)-2
      for n in range (1,8):
          u = (n+1) * u - 1
      return u
```

3. **a.** On se place dans l'intervalle d'intégration : soit $x \in [0\,;\,1]$, donc

$$\begin{aligned}0 \leqslant x \leqslant 1 &\implies 1 - x \leqslant 1 \implies \mathrm{e}^{1-x} \leqslant \mathrm{e} \quad \text{(croissance de la fonction exponentielle)}\\ &\implies x^n\,\mathrm{e}^{1-x} \leqslant x^n \times \mathrm{e} \quad (x^n \geqslant 0)\\ &\implies \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n \times \mathrm{e}\,\mathrm{d}x \quad \text{(craoissance de l'intégration)}\\ &\implies \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \implies u_n \leqslant \mathrm{e}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1\\ &\implies u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}\end{aligned}$$

b. On sait que pour tout n, on a : $0 \leqslant u_n$; donc $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{n+1} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, on peut dire que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

Exercice 4 **4 points**

1. Puisque $x > 0$, on peut écrire $f(x) = x^2\left(\dfrac{\ln(x)}{x^2} - 1\right)$.

On sait (croissances comparées) que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$, donc que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} - 1 = -1$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, on obtient finalement par produit de limites

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2\left(\dfrac{\ln(x)}{x^2} - 1\right) = -\infty$.

L'affirmation 1 est vraie.

2. $f(x) = 2\cos(x) - \sin(x)$, donc : $f'(x) = -2\sin(x) - \cos(x)$. Donc :

$$\begin{aligned} -2f'(x) + 3f(x) &= -2(-2\sin(x) - \cos(x)) + 3(2\cos(x) - \sin(x)) \\ &= 4\sin(x) + 2\cos(x) + 6\cos(x) - 3\sin(x) \\ &= \sin(x) + 8\cos(x) \end{aligned}$$

Donc la fonction f est solution de l'équation différentielle $-2y' + 3y = \sin(x) + 8\cos(x)$.

L'affirmation 2 est vraie.

3. On a $u_0 = 25$ et donc $u_1 = \ln(3 \times 25 + 1) = \ln 76 \approx 4{,}3 < 25$.

On peut donc supposer que la suite est décroissante ce que l'on démontre par récurrence : soit $(P_n) : u_{n+1} < u_n$

Initialisation : on a vu que $u_1 < u_0$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $u_{n+1} < u_n$: on a succesivement :

$$\begin{aligned} u_{n+1} < u_n &\iff 3u_{n+1} < 3u_n \\ &\iff 3u_{n+1} + 1 < 3u_n + 1 \\ &\iff \ln(3u_{n+1} + 1) < \ln(3u_n + 1) \text{ par croissance de la fonction ln} \\ &\iff u_{n+2} < u_{n+1} \end{aligned}$$

La relation est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} < u_n$: ceci montre que la suite (u_n) est décroissante.

L'affirmation 3 est vraie.

4. Une application affine est de la forme $h(x) = ax + b$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Donc $k(x) = x^4 + x^2 + ax + b$; k est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle on a successivement :

$k'(x) = 4x^3 + 2x + a$, puis

$k''(x) = 12x^2 + 2$, comme un carré est supérieur ou égal à zéro, il en résulte que $k''(x) \geqslant 2 > 0$.

Sur $\mathbb{R}$, la dérivée seconde est supérieure à zéro : la fonction k est convexe sur $\mathbb{R}$.

L'affirmation 4 est vraie.

5. Avec 5 lettres différentes le nombre d'anagrammes est égal à $5! = 120$.

Comme EULER possède deux lettres identiques le nombre d'anagrammes est égal à

$\dfrac{5!}{2!} = \dfrac{120}{2} = 60$.

L'affirmation 5 est fausse.