Corrigé du baccalauréat Nouvelle Calédonie 2025

Sujet 2 – 21/11/2025

Exercice 1 **4 points**

1. Dans un cube toutes les faces sont des carrés de même côté, donc les diagonales de chaque face ont même longueur.

Or dans le triangle HAC, chaque côté est une diagonale d'une face ([HA] est une diagonale de ADHE, [AC] est une diagonale de ABCD et [CH] est une diagonale de CDHG). Les trois côtés du triangle HAC ont donc même longueur $\sqrt{2}$, c'est donc un triangle équilatéral.

Or les angles aux sommets d'un triangle équilatéral mesurent 60°, donc HAC n'est pas rectangle.

L'affirmation 1 est **FAUSSE**.

2. Les droites (DH) et (BF) sont des arêtes opposées du cube, elles sont donc parallèles, et donc coplanaires. Donc (BF) est une droite du plan (DFH).

Comme I est un point de (BF) il appartient au plan (DFH). Donc les droites (DI) et (HF) sont coplanaires.

Puisque (BD) est la droite parallèle à (HF) passant par D (arêtes opposées), et que B et I sont distincts, d'après l'axiome d'Euclide, la droite (DI) n'est pas parallèle à (HF). Or si deux droites sont coplanaires, elles sont soit parallèles soit sécantes. Donc (DI) et (HF) sont sécantes.

L'affirmation 2 est **VRAIE**.

3. Si le vecteur $\overrightarrow{u}$ est normal au plan (FAC) alors il est orthogonal à tout vecteur de ce plan.

On calcule donc le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{FC}$, puisque deux vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

$\overrightarrow{FC} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-0 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{FC} &= \sin(\alpha) \times 0 + \sin(\pi - \alpha) \times 1 + \sin(-\alpha) \times (-1) \\ &= \sin(\pi - \alpha) - \sin(-\alpha) \\ &= \sin(\alpha) + \sin(\alpha) \\ &= \boxed{2\sin(\alpha) \neq 0} \quad \text{puisque } \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ n'est donc pas orthogonal au vecteur $\overrightarrow{FC}$. Donc, puisqu'il existe un vecteur de (FAC) qui n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}$ n'est pas un vecteur normal à (FAC).

L'affirmation 3 est **FAUSSE**.

4. Un cube possède **8 sommets**.

Pour former un segment, on doit choisir 2 sommets distincts parmi ces 8 sommets. L'ordre n'a pas d'importance (le segment reliant A à B est le même que celui reliant B à A).

On utilise donc une combinaison :

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = \frac{56}{2} = 28.$$

Il existe **28 segments** pouvant relier deux sommets distincts d'un cube.

L'affirmation 4 est **FAUSSE**.

Exercice 2 **6 points**

Partie A

L'aire de la ZONE 1 est l'aire du triangle OKJ. C'est un triangle rectangle isocèle en J on a donc :

$$\text{aire (ZONE 1)} = \text{aire (OKJ)} = \frac{\text{OJ} \times \text{JK}}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

L'aire de ZONE 2 est l'aire sous la courbe de la fonction carré entre 0 et 1 :

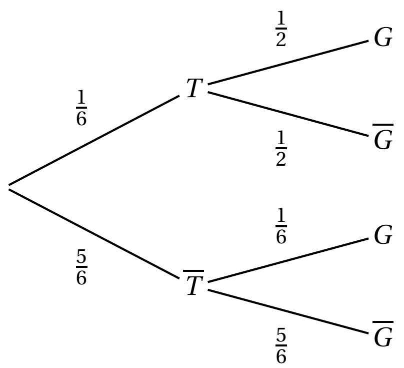
$$\text{aire (ZONE 2)} = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

- L'aire de la ZONE 3 est la différence entre l'aire du carré OIJK et la somme des aires de la ZONE 1 et de la ZONE 2 :

$$\text{aire (ZONE 3)} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 1 - \left(\frac{3}{6} + \frac{2}{6}\right) = \frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \boxed{\frac{1}{6}}.$$

Partie B

1. On représente la situation par un arbre pondéré.



2. Les évènements T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
P(G) &= P(T \cap G) + P\left(\overline{T} \cap G\right) = P(T) \times P_T(G) + P\left(\overline{T}\right) \times P_{\overline{T}}(G)\\
&= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{5}{36} = \frac{3}{36} + \frac{5}{36}\\
&= \frac{8}{36} = \frac{4 \times 2}{4 \times 9} = \boxed{\frac{2}{9}}.
\end{aligned}$$

3. On veut déterminer la probabilité $P_G(T)$:

$$P_G(T) = \frac{P(T \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{9}} = \frac{1}{\cancel{12}_{4}} \times \frac{\cancel{9}^{3}}{2} = \boxed{\frac{3}{8}}.$$

Partie C

1. **a.** La loi de probabilité de X_1 est :

x_i	1	2	3
$P(X_1 = x_i)$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{6}$

On a donc :

$$E(X_1) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + \cancel{3} \times \frac{1}{\underset{2}{\cancel{6}}} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{5}{3}}.$$

b. On calcule la variance en utilisant la formule de König :

$$\begin{aligned} V(X_1) &= E\left(X_1^2\right) - [E(X_1)]^2 \\ &= 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{6} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{6} - \frac{25}{9} = \frac{9}{18} + \frac{24}{18} + \frac{27}{18} - \frac{50}{18} = \frac{10}{18} \\ &= \boxed{\frac{5}{9}} \end{aligned}$$

2. **a.** L'évènement $\{Y = 9\}$ correspond à $\{X_1 = 3\} \cap \{X_2 = 3\} \cap \{X_3 = 3\}$.
Donc, comme les variables X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes :

$$P(Y = 9) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{216}}.$$

b. D'après la linéarité de l'espérance :

$$E(Y) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = \frac{5}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{3} = \boxed{5}$$

c. Puisque les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes, on peut utiliser l'additivité de la variance :

$$V(Y) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = \frac{5}{9} + \frac{5}{9} + \frac{5}{9} = \frac{15}{9} = \frac{3 \times 5}{3 \times 3} = \boxed{\frac{5}{3}}.$$

Exercice 3 — 5 points

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 2\right).$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \ln(9)$, et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\boxed{f'(x) = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 2}}.$$

On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\text{e}^{\frac{x}{2}} > 0$, on on déduit que $\dfrac{1}{2}\text{e}^{\frac{x}{2}} > 0$ et $\text{e}^{\frac{x}{2}} + 2 > 0$.

Les deux termes du quotient sont supérieurs à zéro, donc $f'(x)$ est supérieur à zéro sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. On sait que si $u > 0$, alors $\ln\left(\text{e}^{u}\right) = u$, donc en particulier

$$f(2\ln(2)) = \ln\left(\text{e}^{\frac{2\ln(2)}{2}} + 2\right) = \ln\left(\text{e}^{\ln(2)} + 2\right) = \ln(2+2) = \ln(4) = \ln\left(2^2\right) = \boxed{2\ln(2)}.$$

3. $$u_1 = f(u_0) = \ln\left(\text{e}^{\frac{\ln(9)}{2}} + 2\right) = \ln\left(\text{e}^{\ln\left(9^{\frac{1}{2}}\right)} + 2\right) = \ln\left(\text{e}^{\ln(3)} + 2\right) = \ln(3+2) = \boxed{\ln(5)}$$

4. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $2\ln(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation**
  La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $\ln(4) \leqslant \ln(5) \leqslant \ln(9)$ c'est-à-dire $2\ln(2) \leqslant u_1 \leqslant u_0$. La propriété est donc vérifiée pour $n = 0$.
- **Hérédité**
  Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ on ait $2\ln(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
  On sait que la fonction f est strictement croissante donc :
  $$2\ln(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \iff f(2\ln(2)) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \iff 2\ln(2) \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$
  Le propriété est donc bien héréditaire.
- **Conclusion**
  La propriété est vérifiée pour $n = 0$, et elle est héréditaire pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc d'après le principe de récurrence, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2\ln(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

5. D'après la question précédente on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$, ce qui montre que la suite (u_n) est décroissante.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geqslant 2\ln(2)$, donc la suite (u_n) est minorée.

Donc, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite supérieure ou égale à $2\ln(2)$.

6. **a.** On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 - X - 2 = 0$
Calcul du discriminant :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = \boxed{9}.$$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$:

$$X_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{1-3}{2} = -1 \quad ; \quad X_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{1+3}{2} = 2.$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{-1\ ;\ 2\}}$$

b. $$\text{e}^{x} - \text{e}^{\frac{x}{2}} - 2 = 0 \iff \text{e}^{\frac{2x}{2}} - \text{e}^{\frac{x}{2}} - 2 = 0 \iff \left(\text{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2 - \text{e}^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$$

Posons $X = \text{e}^{\frac{x}{2}}$. On a alors :

$$\left(\text{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2 - \text{e}^{\frac{x}{2}} - 2 = 0 \iff X^2 - X - 2 = 0$$

D'après la question précédente, les solutions de l'équation $X^2 - X - 2 = 0$ sont $X_1 = -1$ et $X_2 = 2$. On a donc :

- $\mathrm{e}^{\frac{x_1}{2}} = -1$ (impossible car $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} > 0$)
- $\mathrm{e}^{\frac{x_2}{2}} = 2 \iff \dfrac{x_2}{2} = \ln(2) \iff x_2 = 2\ln(2)$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{2\ln(2)\right\}}$$

c. On a vu à la question **5.** que la suite (u_n) converge. Soit ℓ la limite de la suite (u_n). Comme f est une fonction continue, d'après le théorème du point fixe, on a ℓ qui vérifie $f(\ell) = \ell$.

On considère donc l'équation $f(x) = x$:

$$f(x) = x \iff \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 2\right) = x \iff \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 2 = \mathrm{e}^{x} \iff \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2 = 0.$$

D'après la question précédente la solution de cette équation est $x = 2\ln(2)$, donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2\ln(2)}.$$

Exercice 4 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} + 1.$$

1. On calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 = 0^+\end{array}\right\} \overset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{\ln(x)}{x^2} + 1\right) = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty}$$

Puisque $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$, la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

Par croissance comparée $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x^2} + 1\right) = 1$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$$

Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ la courbe $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y = 1$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

2. La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times \ln(x)}{\left(x^2\right)^2} = \frac{x - 2x\ln(x)}{x^4} = \frac{\cancel{x}(1 - 2\ln(x))}{\cancel{x^4}^{\,3}} = \boxed{\frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}}$$

3. Sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ on a $x^3 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $1-2\ln(x)$.

$$1-2\ln(x) \geqslant 0 \iff -2\ln(x) \geqslant -1 \iff \ln(x) \leqslant \frac{1}{2} \iff x \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \qquad (\text{car } x \mapsto \mathrm{e}^x \text{ est croissante})$$

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
Variations de f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1+2\mathrm{e}}{2\mathrm{e}}$	$\searrow$	1

$$\begin{aligned} f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) &= \frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)^2}+1 \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{2\times\frac{1}{2}}}+1 \\ &= \frac{1}{2\mathrm{e}}+1 \\ &= \frac{1+2\mathrm{e}}{2\mathrm{e}} \approx 1{,}184 \end{aligned}$$

4. **a.** Sur l'intervalle $\left]0~;~\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right]$ la fonction f est continue et strictement croissante avec $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = -\infty$ et $f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1+2\mathrm{e}}{2\mathrm{e}} > 0$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

Sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}~;~+\infty\right[$ la fonction f est continue et strictement décroissante avec $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution.

Finalement l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0~;~+\infty[$.

b. À la calculatrice, on trouve :

$$\boxed{0{,}65 < \alpha < 0{,}66}$$

c. D'après les questions précédentes et puisque la fonction f est croissante sur $\left]0~;~\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right]$ et décroissante sur $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}~;~+\infty\right[$, la fonction f est strictement négative sur $]0~;~\alpha[$, s'annule en α et est strictement positive sur $]\alpha~;~+\infty[$.

5. **a.** Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. Le triangle OHM est rectangle en H, on peut donc appliquer le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{OM}^2 = \mathrm{OH}^2 + \mathrm{HM}^2 = \boxed{x^2 + [\ln(x)]^2}$$

b. On considère la fonction h définie sur $]0~;~+\infty[$ par $h(x) = x^2 + [\ln(x)]^2$. Elle est dérivable puisque somme de fonctions dérivables, et sa dérivée est :

$$h'(x) = 2x+2\times\frac{1}{x}\times\ln(x) = \frac{2x^2+2\ln(x)}{x} = \frac{2x^{\cancel{2}}\left(1+\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)}{\cancel{x}} = 2x\left(1+\frac{\ln(x)}{x^2}\right) = 2x\times f(x)$$

Or, pour tout $x \in\,]0~;~+\infty[$, on a $2x > 0$, donc $h'(x)$ est du signe de $f(x)$.

Donc, d'après la question **4.c.**, $h'(x)$ est négatif sur $]0~;~\alpha]$ et positif sur $[\alpha~;~+\infty[$.

Donc h admet un minimum en $x = \alpha$.

La quantité OM^2 admet donc un minimum en α.

c. Pour $x = \alpha$, on a $\mathrm{OM}^2 = \alpha^2 + (\ln(\alpha))^2$.

α est la solution de l'équation $f(x) = 0$, donc $f(\alpha) = 0$.

Donc $\dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} + 1 = 0 \iff \ln(\alpha) = -\alpha^2 \implies (\ln(\alpha))^2 = \alpha^4$

Le minimum de OM^2 est donc $\alpha^2 + \alpha^4$.

Puisque la quantité OM^2 admet un minimum en α et que d est la valeur minimale de OM :

$$\boxed{d = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}}$$