

Exercice 1

6 points

A. P. M. E. P.

Partie A

- $u_1 = u_0 \times 0,93 = 6 \times 0,93 = 5,58$.
- (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $q = 0,93$ donc pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n = 6 \times 0,93^n$.
- La raison q vérifiant $q \in]-1 ; 1[$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,93^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
Interprétation : ceci signifie qu'au bout d'un grand nombre d'années la population animale dans le milieu A va aller à l'extinction.

Partie B

- Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n$.
En particulier $v_1 = -0,05 \times 6^2 + 1,1 \times 6 = -1,8 + 6,6 = 4,8$.
Il y aura donc 4 800 individus au 1^{er} janvier 2026.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = -0,05x^2 + 1,1x$.

- La fonction f est dérivable donc continue sur $[0 ; +\infty[$.
 $\forall x \in [0 ; +\infty[$, $f'(x) = -0,1x + 1,1$.
 $f'(x) \geq 0 \iff -0,1x + 1,1 \geq 0 \iff x \leq \frac{1,1}{0,1} \iff x \leq 11$.
Donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 11]$.
- Nous savons que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = f(v_n)$. Montrons par récurrence que : $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$.
 - **Initialisation** : $v_0 = 6$ et $v_1 = 4,8$ donc $2 \leq v_1 \leq v_0 \leq 6$. La proposition est vraie au rang 0.
 - **Hérédité** : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$.
Comme $v_n \in [0 ; 11]$, $v_{n+1} \in [0 ; 11]$, et que f est croissante sur $[0 ; 11]$ d'après le résultat précédent, les images des quatre nombres de l'encadrement sont rangées dans le même ordre croissant, soit
 $f(2) \leq f[v_{n+1}] \leq f[v_n] \leq f(6) \iff 2 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 4,8$ (car $f(2) = -0,05 \times 2^2 + 2,2 = -0,2 + 2,2 = 2$).
On a donc $2 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 6$. La proposition est vraie au rang $n + 1$.
 - **Conclusion** : La proposition est vraie au rang $n = 0$ et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle l'est aussi au rang $n + 1$. D'après l'axiome de récurrence, pour tout entier naturel n ,

$$2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6.$$

- Le résultat précédent montre deux résultats : pour tout entier naturel n ,
 - $v_{n+1} \leq v_n$ donc la suite (v_n) est décroissante;

- $2 \leq v_n$ donc la suite (v_n) est minorée par 2.

D'après le théorème de la convergence monotone, la suite (v_n) converge vers une limite $\ell \geq 2$.

5. a. La fonction f est continue, $(f([2; 6]) \subset [2; 6])$ et la suite (v_n) converge, donc d'après le théorème du point fixe, ℓ est l'unique solution sur $[2; 6]$ de l'équation $f(x) = x$.

- b. On résout l'équation $\ell = f(\ell)$:

$$\ell = f(\ell) \iff \ell = -0,05\ell^2 + 1,1\ell \iff 0,05\ell^2 - 0,1\ell = 0 \iff 0,05\ell(\ell - 2) = 0$$

On obtient deux solutions : $\ell = 0 \notin [2; 6]$ et $\ell = 2$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$.

Ceci signifie qu'au bout d'un certain nombre d'années la population va se rapprocher de 2 000 individus, soit le tiers du nombre initial.

Partie C

1. En milieu A, on utilise la suite (u_n) . On cherche à résoudre $u_n < 3$.

$$u_n < 3 \iff 6 \times 0,93^n < 3 \iff 0,93^n < \frac{1}{2}. \text{ La fonction } x \mapsto \ln(x) \text{ est croissante sur }]0; +\infty[$$

$$\text{donc } 0,93^n < \frac{1}{2} \iff \ln(0,93^n) < \ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff n \times \ln(0,93) < -\ln(2)$$

$$\iff n > -\frac{\ln(2)}{\ln(0,93)} \text{ car } \ln(0,93) < 0.$$

$$\text{Or } -\frac{\ln(2)}{\ln(0,93)} \approx 9,55 \text{ donc } n \geq 10 \text{ soit en 2035.}$$

À partir de 2035, le nombre d'individus en milieu A sera inférieur à 3 000.

2. On sait que (v_n) est décroissante. Avec la calculatrice, on trouve $v_5 \approx 3,14$ et $v_6 \approx 2,96$. Donc pour $n \geq 6$.
Ce sera donc à partir de 2031.

3. La suite (u_n) converge vers 0, et (v_n) converge vers 2. Les deux suites étant décroissantes en partant de $u_0 = v_0 = 6$, il existera un rang N tel que $v_N > u_N$.

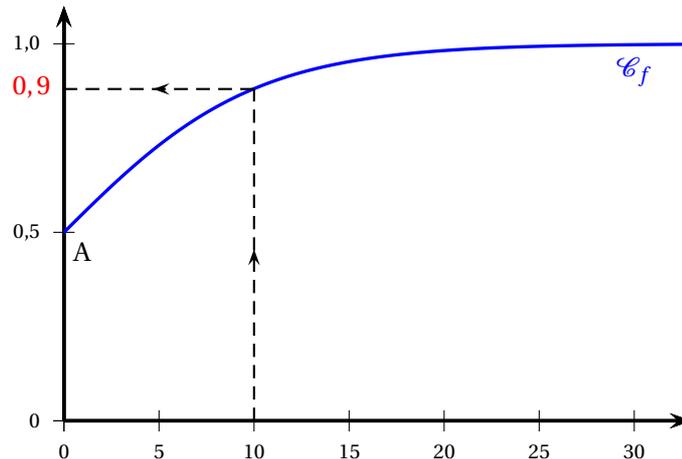
4. Le script complété :

```
n=0
u = 6
v = 6
while u >= v :
    u = 0.93*u
    v = -0.05*v**2+1.1*v
    n = n+1
print (2025 + n)
```

5. Le script affiche 2038. Avec la calculatrice : $u_{12} \approx 2,51$ et $v_{12} \approx 2,41$; $u_{13} \approx 2,34$ et $v_{13} \approx 2,36$. Donc $N = 13$.

Exercice 2**6 points****Partie A**

1. $1970 - 1960 = 10$. Donc on lit $f(10)$.



Dans la limite de précision du graphique, $f(10) \approx 0,9$.

2. Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$ alors \mathcal{C}_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.
3. $f(0) = \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{a+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a+1 = 2 \Leftrightarrow a = 1$.
4. Soit m ce coefficient directeur. $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0,5}{10} = 0,05$.
5. **a.** La fonction f est continue et dérivable sur $[0; +\infty[$. $f(t)$ est de la forme $\frac{1}{u(t)}$, de dérivée $-\frac{u'(t)}{u^2(t)}$. Donc en posant $u(t) = a + e^{-bt}$, $u'(t) = -be^{-bt}$
 Donc $\forall t \in [0; +\infty[$, $f'(t) = -\frac{-be^{-bt}}{(1+e^{-bt})^2} = \frac{be^{-bt}}{(1+e^{-bt})^2}$.
- b.** Le nombre dérivée de f en 0 est égale à la pente de la droite (AB) , tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0. Donc $f'(0) = 0,05$ donc $\frac{b}{2^2} = 0,05$ donc $b = 4 \times 0,05 = 0,2$.

Partie B

On admet, dans la suite de l'exercice, que le taux d'équipement en réfrigérateurs est représenté par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(t) = \frac{1}{1+e^{-0,2t}}$.

1. $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,2t} = 0$ (par composition). Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$.

2. La fonction f est continue et dérivable sur $[0 ; +\infty[$, de la forme $\frac{1}{u(t)}$, de dérivée

$$-\frac{u'(t)}{u^2(t)}.$$

Donc en posant $u(t) = 1 + e^{-0,2t}$, $u'(t) = -0,2e^{-0,2t}$, $\forall t \in [0 ; +\infty[$, $f'(t) = -\frac{-0,2e^{-0,2t}}{(1 + e^{-0,2t})^2}$

$$\text{soit } f'(t) = \frac{0,2e^{-0,2t}}{(1 + e^{-0,2t})^2}.$$

$\forall t \in [0 ; +\infty[$, $0,2e^{-0,2t} > 0$ et $(1 + e^{-0,2t})^2 > 0$ donc $f'(t) > 0$ donc f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

3. On a $f(0) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$.

La fonction f est continue strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ à valeurs dans $\left[\frac{1}{2} ; 1\right[$.

Or $0,97 \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right[$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,97$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

4. Avec la calculatrice $\alpha \approx 17,4$ donc $\alpha \in]17 ; 18[$.

Partie C

1. $\forall t \in [0 ; +\infty[$, $f(t) = \frac{1}{1 + e^{-0,2t}}$. En multipliant numérateur et dénominateur par $e^{0,2t}$, on obtient : $f(t) = \frac{e^{0,2t}}{e^{0,2t}(1 + e^{-0,2t})} = \frac{e^{0,2t}}{e^{0,2t} + 1} = \frac{e^{0,2t}}{1 + e^{0,2t}}$.

2. f est de la forme $\frac{u'(t)}{u(t)}$, de primitive $\ln(u(t))$ (avec u fonction strictement positive car les deux termes du quotient sont strictement positifs) en posant $u(t) = e^{0,2t}$ et $u'(t) = 0,2e^{0,2t}$.

$$\text{En écrivant } f(t) = \frac{e^{0,2t}}{1 + e^{0,2t}} = \frac{1}{0,2} \times \frac{0,2e^{0,2t}}{1 + e^{0,2t}} = 5 \times \frac{0,2e^{0,2t}}{1 + e^{0,2t}},$$

on détermine la fonction F , une primitive de f : $F(t) = 5 \ln(1 + e^{0,2t})$ pour $t \in [0 ; +\infty[$.

3. $I = \frac{1}{40} \int_0^{40} \frac{1}{1 + e^{-0,2t}} dt = \frac{1}{40} \int_0^{40} \frac{e^{0,2t}}{1 + e^{0,2t}} dt = \frac{1}{40} [5 \ln(1 + e^{0,2t})]_0^{40} =$
 $\frac{5}{40} (\ln(e^8 + 1) - \ln(2))$
 $= \frac{1}{8} (\ln(e^8 + 1) - \ln(2)) = \frac{1}{8} \ln\left(\frac{e^8 + 1}{2}\right) \approx 0,913$

Exercice 3

4 points

Partie A

1. Pour chaque caractère, il y a 64 possibilités, donc pour une séquences de 4 caractères, il y a 64^4 possibilités, soit 16 777 216 possibilités. On pourra noter $\text{card}(\Omega) = 16777216$.

2. Si les caractères sont différents deux à deux, il s'agit alors d'un arrangement de 4 caractères parmi 64 : $\frac{64!}{(64-4)!} = 64 \times 63 \times 62 \times 61 = 15249024$ possibilités.
3. a. On reprend la question 1. avec seulement 63 caractères. cela donne donc $63^4 = 15752961$ possibilités.
- b. Soit X l'évènement : « la séquence ne comporte pas la lettre A ».
Son événement contraire est donc : \bar{X} « la séquence comporte au moins une fois la lettre A ».
Ainsi $\text{card}(X) + \text{card}(\bar{X}) = \text{card}(\Omega)$ donc $\text{card}(\bar{X}) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(X) = 64^4 - 63^4 = 1024255$.
Il y a donc 1 024 255 séquences contenant au moins une fois la lettre A.
- c. La lettre A peut se situer dans l'une des quatre positions dans le code, les trois autres lettres étant différentes. Il y aura donc $4 \times 63^3 = 1000188$ possibilités.
- d. Il y a $\binom{4}{2}$ façons de placer les deux lettres A dans la séquence. Les deux autres lettres ne sont pas des A. Il y aura donc $\binom{4}{2} \times 63^2 = 23814$ possibilités.

Partie B

1. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 250$ et $p = 0,01$.
2. $P(X = 0) = \binom{250}{0} \times 0,01^0 \times (1 - 0,01)^{250-0} = 0,99^{250} \approx 0,081$.
3. On calcule $P(X > 16) = P(X \geq 17)$. Avec la calculatrice, $P(X \geq 17) \approx 1,04 \times 10^{-9}$, ce qui est négligeable.

Partie C

En utilisant les propriétés sur la linéarité de l'espérance et de la variance (les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 et X_4 étant indépendantes), on peut affirmer que :

$$E(S) = E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = 4 \times E(X) = 4 \times n \times p = 4 \times 250 \times 0,01 = 10.$$

Il en est de même pour la variance :

$$V(S) = V(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + V(X_4) = 4 \times V(X) = 4 \times n \times p \times (1 - p) = 4 \times 250 \times 0,01 \times 0,99 = 9,9.$$

Exercice 4

4 points

1. a. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car $\frac{-3}{-1} \neq \frac{1}{3}$.

Les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. D'après la question précédente, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} forment une base du

plan (ABC) . Avec $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, on calcule $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}$:

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 + 1 - 4 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 + 3 - 4 = 0$. \vec{n} est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc il est normal à ce plan (ABC) .

c. \vec{n} étant normal au plan (ABC) , une équation cartésienne de ce plan est de la forme : $-x + y + 4z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

$A(1; 0; 3) \in (ABC)$ donc $-1 + 0 + 12 + d = 0 \iff d = -11$.

Donc (ABC) : $-x + y + 4z - 11 = 0$.

On considère le plan \mathcal{P} d'équation cartésienne $3x - 3y + 2z - 9 = 0$ et le plan \mathcal{P}' d'équation cartésienne $x - y - z + 2 = 0$.

2. a. Le vecteur $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal au plan \mathcal{P} , le vecteur $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal au

plan \mathcal{P}' . Les vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 ne sont pas colinéaires car $\frac{3}{1} \neq \frac{2}{-1}$. Donc les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' ne sont ni parallèles ni confondus. Ils sont donc sécants. Leur intersection est donc une droite (d) .

b. $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 3 + 3 - 2 = 4 \neq 0$ donc les plans ne sont pas perpendiculaires.

(d) est la droite d'intersection des plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' dont les vecteurs normaux sont

respectivement $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Pour montrer que \vec{u} dirige (d) , il suffit de prouver que ce vecteur est contenu dans chacun des plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' , soit $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}' = 0$

Or, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 3 + 1 \times (-3) = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}' = 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$.

Ainsi, (d) est bien dirigée par \vec{u} .

3. On remplace les coordonnées de M dans les deux équations de plans :

- $6 - 3 + 6 - 9 = 12 - 12 = 0$ donc $M \in \mathcal{P}$;
- $2 - 1 - 3 + 2 = 4 - 4 = 0$ donc $M \in \mathcal{P}'$.

La droite (d) passe donc par M et a pour vecteur directeur (d) : \vec{u} donc

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

4. On cherche l'intersection de (ABC) et de (d) . On résout le système :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \\ -x + y + 4z - 11 = 0 \end{cases} \quad . \text{ S'il admet une infinité de solutions alors } (d) \subset (ABC).$$

On remplace x , y et z dans la dernière équation :

$-x + y + 4z - 11 = 0 \Rightarrow -(2 + t) + 1 + t + 4 \times 3 - 11 = 0 \iff 0 = 0$. La dernière équation est vérifiée quelque soit la valeur de t . Donc ce système admet une infinité de solutions. $(d) \subset (ABC)$

Donc la droite (d) appartient aux trois plans (ABC) , \mathcal{P} et \mathcal{P}' . Reprenons les trois

vecteurs normaux des trois plans : $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

\vec{u} et \vec{n}_1 ne sont pas colinéaires, de même pour \vec{u} et \vec{n}_2 . Le plan (ABC) n'est donc confondu ni avec \mathcal{P} ni avec \mathcal{P}' . Ces trois plans sont simplement sécants, d'intersections (d) .