∽ Baccalauréat Métropole 10 septembre 2025 ∾

Corrigé J2

ÉPREUVE DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1 — 6 points

Partie A

1. La variable aléatoire X compte le nombre de succès d'une répétition de 10 épreuves de Bernoulli. Les épreuves sont indépendantes deux à deux. La probabilité du succès est $p = 0,4$. Donc X suit une loi binomiale de paramètres 10 ; 0,4 : $X \sim \mathscr{B}(10\,;\,0,4)$.

2. **a.** $P(X=2) = \binom{10}{2} \times p^2 \times (1-p)^{10-2} = \binom{10}{2} \times 0,4^2 \times 0,6^8 \approx 0,1209$

   b. Comme les évènements $\{X = i\}$ et $\{X = j\}$ sont disjoints pour $i \neq j$:

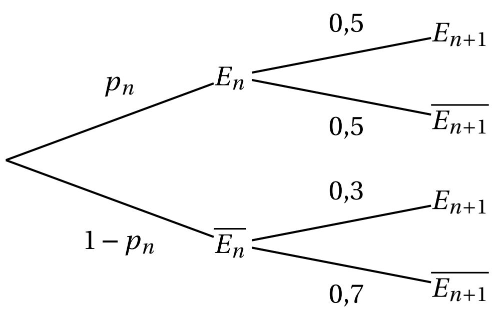
$$\begin{aligned} P(X \leqslant 2) &= P(\{X=0\} \cup \{X=1\} \cup \{X=2\}) \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{2} P(X=i) \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{2} \binom{10}{i} p^i (1-p)^{10-i} \\ &\approx 0,1673 \end{aligned}$$

   La probabilité que le phénomène El Niño soit dominant au plus deux années sur une période de 10 ans est d'environ 0,167 3.

3. Comme X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(10\,;\,0,4)$: $E(X) = n \times p = 10 \times 0,4 = 4$. En moyenne le phénomène El Niño est dominant quatre années sur une période de 10 ans.

Partie B

1.



2. $p_0 = 0$
   $1 - p_0 = 1$
   $p_1 = P(E_1) = P(E_0) \times P_{E_0}(E_1) + P\left(\overline{E_0}\right) \times P_{\overline{E_0}}(E_1) = 0 \times 0,5 + 1 \times 0,3 = 0,3$

3. $p_{n+1} = P(E_{n+1}) = P(E_n) \times P_{E_n}(E_{n+1}) + P\left(\overline{E_n}\right) \times P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$
   $= p_n \times 0,5 + (1-p_n) \times 0,3 = 0,2 \times p_n + 0,3$

4. **a.** En utilisant la calculatrice la suite (p_n) semble être croissante et avoir pour limite 0,375.

n	p_n
0	0
1	0,3
2	0,36
3	0,372
$\vdots$	$\vdots$
13	0,374 999 999 692 8
14	0,374 999 999 938 56

b. On formule l'hypothèse de récurrence $\mathscr{H}(n)$: $p_n \leqslant 0{,}375$.
On vérifie que $\mathscr{H}(0)$ est vraie (initialisation).
Comme $p_0 = 0 \leqslant 0{,}375$, $\mathscr{H}(0)$ est vraie.
Montrons que $\mathscr{H}(n) \Rightarrow \mathscr{H}(n+1)$ (hérédité).
On suppose que $\mathscr{H}(n)$ est vraie, avec $n \in \mathbb{N}$.
$p_{n+1} = 0{,}2 \times p_n + 0{,}3$
D'après $\mathscr{H}(n)$, $p_n \leqslant 0{,}375$, en multipliant par 0,2 on obtient :
$0{,}2 \times p_n \leqslant 0{,}075$, en ajoutant 0,3 on obtient :
$0{,}2 \times p_n + 0{,}3 \leqslant 0{,}375$, ainsi on obtient :
$p_{n+1} \leqslant 0{,}375$ ($\mathscr{H}(n+1)$ est vérifiée)
D'après le principe de récurrence,
$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 0, p_n \leqslant 0{,}375$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n désignant une probabilité est un nombre positif.
Soit $n \in \mathbb{N}$
$p_{n+1} - p_n = -0{,}8 \times p_n + 0{,}3$
$p_{n+1} - p_n \geqslant -0{,}8 \times 0{,}375 + 0{,}3$
$p_{n+1} - p_n \geqslant 0$
Ceci étant valable quelque soit le choix de n, $\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} - p_n \geqslant 0$, donc (p_n) est croissante.

d. (p_n) est croissante et majorée donc (p_n) est convergente vers l. De plus $l \leqslant 0{,}375$.

5. a.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{3}{8}\\
&= 0{,}2 \times p_n + 0{,}3 - \frac{3}{8}\\
&= 0{,}2 \times p_n + 0{,}2 \times \frac{3}{2} - 0{,}2 \times \frac{15}{8}\\
&= 0{,}2 \times p_n + 0{,}2 \times \left(\frac{3}{2} - \frac{15}{8}\right)\\
&= 0{,}2 \times p_n + 0{,}2 \times \left(-\frac{3}{8}\right)\\
&= 0{,}2 \times \left(p_n - \frac{3}{8}\right)
\end{aligned}$$

Finalement quel que soit n naturel, $u_{n+1} = 0{,}2 \times u_n$: ceci prouve que (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2.
$u_0 = p_0 - \frac{3}{8} = 0 - \frac{3}{8} = -\frac{3}{8}$

Le premier terme est donné par : $u_0 = -\dfrac{3}{8}$

b. Comme (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2 de premier terme $u_0 = -\dfrac{3}{8}$:

$\forall n \in \mathbb{N}\ :\ u_n = -\dfrac{3}{8} \times 0{,}2^n$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}\ :\ u_n = p_n - \dfrac{3}{8}$,

$\forall n \in \mathbb{N}\ :\ p_n = -u_n + \dfrac{3}{8} = (-0{,}2^n + 1) \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{3}{8}\left(1 - 0{,}2^n\right)$

c. Comme $0{,}2 < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0{,}2^n = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{3}{8}$

d. La probabilité d'observer un phénomène El Niño dominant tend vers $\dfrac{3}{8}$ quand le nombre d'années d'observation augmente.

Exercice 2 — 5 points

1. $\binom{14}{2} \times \binom{10}{2} = 4\,095 \neq 272$.

L'énoncé indique « est-il possible » et ne fait pas intervenir le nombre maximum de groupes composés de deux filles et deux garçons. Comme $272 < 4\,095$, **l'affirmation est vraie.**

2. f est dérivable comme composée de fonctions dérivables.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 6 \times \cos(2x + \pi)$

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 6 \times \cos\left(2 \times \dfrac{\pi}{2} + \pi\right) = 6$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3 \times \sin\left(2 \times \dfrac{\pi}{2} + \pi\right) = 0$

L'équation de la tangente au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ est donnée par :

$y = \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \times f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

$y = 6x - 6 \times \dfrac{\pi}{2}$

$y = 6x - 3\pi$

L'affirmation est vraie.

3. $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[, F'(x) = \dfrac{2x\ln x + 2x + 1}{x}$, en particulier $F'(1) = \dfrac{3}{2}$ et $f(1) = 2$. f n'est pas la dérivée de F. Ainsi on montre que F n'est pas une primitive de f.

L'affirmation est fausse.

4. $g(0) = 45 \times \mathrm{e}^0 + 20 = 65$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad g'(t) + 0{,}06 \times g(t) = 45 \times 0{,}06 \times \mathrm{e}^{0{,}06t} + 0{,}06 \times \left(45 \times \mathrm{e}^{0{,}06t} + 20\right) = 5{,}4 \times \mathrm{e}^{0{,}06t} + 1{,}2$

g n'est pas solution de (E).

L'affirmation est fausse.

5. Soit y une solution positive de (E_2) on peut écrire $\forall x \in \mathbb{R} \quad y'(x) = y(x) + 3\mathrm{e}^{0{,}4x}$, comme $\forall x \in \mathbb{R} \quad y(x) \geqslant 0$ et $3\mathrm{e}^{0{,}4x} \geqslant 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad y'(x) \geqslant 0$.

On dérive l'équation différentielle :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad y''(x) = y'(x) + 1{,}2\mathrm{e}^{0{,}4x}$. Comme $\forall x \in \mathbb{R} \quad y'(x) \geqslant 0$ et $1{,}2\mathrm{e}^{0{,}4x} \geqslant 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad y''(x) \geqslant 0$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad y''(x) \geqslant 0$ donc y est convexe sur $\mathbb{R}$.

L'affirmation est vraie : les solutions positives de (E_2) sont des fonctions convexes sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 4 points

Partie A

1. $-x^2+7x+8=0$ admet -1 comme solution évidente. L'autre solution de l'équation du second degré est donc 8.

   Le trinôme est négatif (du signe du coefficient de x^2), sauf entre les racines, d'où le tableau de signes de $x \longmapsto -x^2+7x+8$:

x	$-\infty$		-1		8		$+\infty$
signe de $-x^2+7x+8$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   L'ensemble des solutions de l'inéquation $-x^2+7x+8 \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ est l'intervalle $[-1\ ;\ 8]$

2. Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ 8]$, $-x^2+7x+8 \geqslant 0$. D'où en ajoutant 1 à chaque membre $-x^2+7x+9 \geqslant 1$.

   Comme la fonction logarithme népérien est une fonction croissante on a pour tout x appartenant à $]0\ ;\ 8]$, $\ln\left(-x^2+7x+9\right) \geqslant \ln(1)$. C'est à dire $\ln\left(-x^2+7x+9\right) \geqslant 0$.

   Pour tout x appartenant à $]0\ ;\ 8]$, $x > 0$ et $10\ln\left(-x^2+7x+9\right) \geqslant 0$, donc $f(x) = \dfrac{10\ln\left(-x^2+7x+9\right)}{x} \geqslant 0$.

3. Sur l'intervalle $[0\ ;\ 8]$ la courbe représentative est au dessus de l'axe des abscisses.

Partie B

1. Pour $x \in\ ]0\ ;\ 8]$, $\mathrm{M}\left(x, \dfrac{10\ln\left(-x^2+7x+9\right)}{x}\right)$ et donc $\mathrm{N}(x,0)$ et $\mathrm{P}\left(0, \dfrac{10\ln\left(-x^2+7x+9\right)}{x}\right)$.

2. Comme pour $x \in\ ]0\ ;\ 8]$, l'abscisse de N est positive et l'ordonnée de P est positive.

   On peut écrire ON$= x$ et OP$= \dfrac{10\ln\left(-x^2+7x+9\right)}{x}$.

   L'aire de ONMP vaut ON $\times$ OP donc :

   $\forall x \in\ ]0\ ;\ 8] \quad \mathscr{A}(x) = x \times \dfrac{10\ln\left(-x^2+7x+9\right)}{x} = 10\ln\left(-x^2+7x+9\right)$

3. Sur $]0\ ;\ 8[$, $-x^2+7x+9 > 0$ donc $\mathscr{A}$ est une fonction dérivable de la variable x sur $]0\ ;\ 8[$ comme composée de fonction définies et dérivables.

   $\forall x \in\ ]0\ ;\ 8[$, $\mathscr{A}'(x) = 10 \times \dfrac{-2x+7}{-x^2+7x+9}$.

   S'il existe $x \in\ ]0\ ;\ 8[$ telle que $\mathscr{A}(x)$ soit maximale, il faut que $\mathscr{A}'(x) = 0$

   Pour $x \in\ ]0\ ;\ 8[$, $-x^2+7x+9 > 0$, $\mathscr{A}'(x)$ est donc du signe de $-2x+7$.

   $$\mathscr{A}'(x) \geqslant 0 \iff -2x+7 \geqslant 0$$
   $$\mathscr{A}'(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant \frac{7}{2}$$

$\mathscr{A}$ est croissante sur $\left]0\,;\,\dfrac{7}{2}\right[$ et décroissante sur $\left]\dfrac{7}{2}\,;\,8\right[$.

La dérivée s'annule en $\dfrac{7}{2}$, en étant positive avant puis négative après, donc la fonction $\mathscr{A}$ a un maximum sur $]0\,;\,8[$, :

$\mathscr{A}\left(\dfrac{7}{2}\right) = 10\ln(17) + 10\ln(5) - 20\ln(2) \approx 30{,}56$

Partie C

1.

```python
from math import *

def A(x):
        return 10*log(-1 * x**2 + 7*x + 9)

def pluspetitevaleur(k):
        x = 3.5
        while A(x) > k:
                x = x + 0.1
        return x
```

2. `>>>pluspetitevaleur(30)`
`4.599999999999998`

3. Lorsque $k = 35$, la condition `A(x) > 35` n'est pas vérifiée donc le contenu de la boucle n'est pas exécuté. L'appel `pluspetitevaleur(35)` renvoie `3.5`.

Exercice 4 — 5 points

1. **a.** On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\2\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\5\\2\end{pmatrix}$

On constate que $\dfrac{-5}{2} \neq \dfrac{-4}{5}$. Comme les coordonnées des vecteurs ne sont pas proportionnelles, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et A, B et C ne sont pas alignés.

b. D appartient au plan (ABC) si et seulement si les coordonnées de D vérifient l'équation cartésienne du plan (ABC).

$29 \times (-3) + 30 \times (-4) - 17 \times 6 = -309 \neq 35$. Les coordonnées de D ne vérifient pas l'équation cartésienne du plan (ABC), donc les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires.

2. **a.** Les coordonnées du milieu de [AB] sont : $\dfrac{4+(-1)}{2}\;;\;\dfrac{-1+1}{2}\;;\;\dfrac{3+(-2)}{2}$ soit $\dfrac{3}{2}\,;\,0\,;\,\dfrac{1}{2}$.

b. Un vecteur normal au plan P_1 médiateur du segment [AB] est le vecteur $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}5\\-2\\5\end{pmatrix}$

donc une équation de P_1 est $5x-2y+5z=k$ avec k tel que les coordonnées du milieu de [AB] vérifient l'équation c'est-à dire si

$5\times\dfrac{3}{2}-2\times 0+5\times\dfrac{1}{2}=k=10$

Ainsi $5x-2y+5z=10$ est une équation cartésienne de P_1.

3. **a.**

$$\begin{aligned}\mathrm{MC}^2 &= (x-0)^2+(y-4)^2+(z-5)^2\\ &= x^2+y^2+z^2-8y-10z+16+25\\ &= x^2+y^2+z^2-8y-10z+41\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{MD}^2 &= (x-(-3))^2+(y-(-4))^2+(z-6)^2\\ &= x^2+y^2+z^2+6x+8y-12z+9+16+36\\ &= x^2+y^2+z^2+6x+8y-12z+61\end{aligned}$$

M appartient à P_2 est équivalent à $\mathrm{MC}^2=\mathrm{MD}^2$.

$$\begin{aligned}\mathrm{MC}^2=\mathrm{MD}^2 &\iff \mathrm{MC}^2-\mathrm{MD}^2=0\\ &\iff x^2+y^2+z^2-8y-10z+41\\ &\qquad -x^2-y^2-z^2-6x-8y+12z-61=0\\ &\iff -6x-16y+2z-20=0\\ &\iff -6x-16y+2z=20\\ &\iff -3x-8y+z=10\end{aligned}$$

On obtient l'équation cartésienne de P_2 : $-3x-8y+z=10$.

b. Un vecteur normal à P_1 est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}5\\-2\\5\end{pmatrix}$.

Un vecteur normal à P_2 est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-3\\-2\\5\end{pmatrix}$

On remarque que $\dfrac{5}{-2}\neq\dfrac{-3}{-2}$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car leur coordonnées ne sont pas proportionnelles.

Comme les vecteurs normaux à P_1 et P_2 ne sont pas colinéaires, alors les plans P_1 et P_2 sont sécants.

4. $\forall t\in\mathbb{R}\quad 5\times(-2-1{,}9t)-2\times t+5\times(4+2{,}3t)=-10-9{,}5t-2t+20+11{,}5t=10$

Tout point de Δ appartient à P_1.

$\forall t\in\mathbb{R}\quad -3\times(-2-1{,}9t)-8\times t+(4+2{,}3t)=6+5{,}7t-8t+4+2{,}3t=10$

Tout point de Δ appartient à P_2.

Δ est donc la droite d'intersection de P_1 et P_2.

5. D'après la représentation paramétrique de Δ, un vecteur directeur de Δ est le vecteur $\overrightarrow{\delta}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 19 \\ -10 \\ 23 \end{pmatrix}$.

Le plan P_3 admet un vecteur normal $\overrightarrow{n_3}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ -4 \end{pmatrix}$.

La droite Δ et le plan P_3 ne sont pas sécants si et seulement si un vecteur directeur de Δ est orthogonal à un vecteur normal au plan P_3.

On calcule le produit scalaire des deux vecteurs précités :

$\overrightarrow{\delta} \cdot \overrightarrow{n_3} = 19 \times 8 + (-10) \times (-10) + 23 \times (-4) = 160 \neq 0$

Le produit scalaire n'est pas nul, les deux vecteurs ne sont pas orthogonaux, Δ et P_3 sont donc sécants.

6. On considère le point H équidistant des points A, B, C, D. Comme AH = BH, H appartient à P_1. Comme DH = CH, H appartient à P_2. Ainsi H appartient à l'intersection des deux plans, la droite Δ. Comme AH = CH, H appartient au plan P_3. Ainsi H est l'intersection de Δ et de P_3.

Le point équidistant des sommets d'un tétraèdre est l'intersection des plans médiateurs de ses arêtes.

On peut déterminer les coordonnées de H.

Il suffit de résoudre l'équation :

$8(-2-1{,}9t) - 10t - 4(4+2{,}3t) = -15$