∽ Corrigé du Baccalauréat Polynésie 18 juin 2025 ∾

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

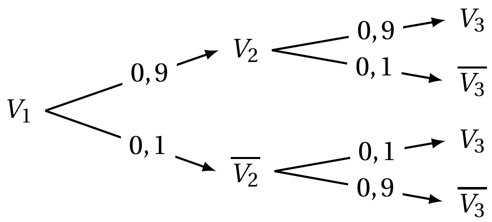
Exercice 1 — 5 points

L'énoncé annonce des proportions, on va modéliser la situation de probabilité en assimilant les proportions à des probabilités.

Partie A

1. **a.** D'après l'énoncé, on a donc : $P(V_1) = 1$ et, pour tout n naturel supérieur ou égal à 2 : $P_{V_{n-1}}(V_n) = 0,9$ et aussi $P_{\overline{V_{n-1}}}\left(\overline{V_n}\right) = 0,9$. (une transmission fidèle, c'est quand les machines $n-1$ et n détiennent la même valeur).

On obtient l'arbre ci-contre :



b. Les évènements V_2 et $\overline{V_2}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales :

$P(V_3) = P\left(V_3 \cap V_2\right) + P\left(V_3 \cap \overline{V_2}\right) = 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,1 = 0,81 + 0,01 = 0,82.$

On arrive bien à $P(V_3) = 0,82$.

c. On demande de calculer : $P_{V_3}(V_2)$.

D'après la définition, on a : $P_{V_3}(V_2) = \dfrac{P(V_3 \cap V_2)}{P(V_3)} = \dfrac{0,9 \times 0,9}{0,82} = \dfrac{81}{82} \approx 0,988.$

À 10^{-3} près, la probabilité que la machine 2 détienne 1, sachant que la machine 3 détient 1 est d'environ 0,988.

2. **a.** Soit n un entier naturel non nul.

Les évènements V_n et $\overline{V_n}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= P(V_{n+1})\\
&= P\left(V_{n+1} \cap V_n\right) + P\left(V_{n+1} \cap \overline{V_n}\right)\\
&= P_{V_n}\left(V_{n+1}\right) \times P\left(V_n\right) + P_{\overline{V_n}}\left(V_{n+1}\right) \times P\left(\overline{V_n}\right)\\
&= 0,9 \times P\left(V_n\right) + 0,1 \times P\left(\overline{V_n}\right)\\
&= 0,9 \times p_n + 0,1 \times (1 - p_n)\\
&= 0,9p_n + 0,1 - 0,1p_n\\
&= 0,8p_n + 0,1
\end{aligned}$$

On arrive donc bien à la relation de récurrence annoncée pour la suite (p_n).

b. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

P_n est l'affirmation : « $p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5$ ».

Initialisation : on a, d'après l'énoncé : $p_1 = 1$,

et, par ailleurs, on a : $0,5 \times 0,8^{1-1} + 0,5 = 0,5 + 0,5 = 1$.

On constate donc que l'affirmation P_1 est vraie.

Hérédité : soit n naturel non nul tel que l'affirmation P_n est vraie, soit :

$$\begin{aligned}
p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5 &\implies 0,8p_n = 0,8\left(0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5\right)\\
&\implies 0,8p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} \times 0,8 + 0,4\\
&\implies 0,8p_n = 0,5 \times 0,8^{n} + 0,4\\
&\implies 0,8p_n + 0,1 = 0,5 \times 0,8^{n} + 0,4 + 0,1\\
&\implies 0,8p_n + 0,1 = 0,5 \times 0,8^{n} + 0,5\\
&\implies p_{n+1} = 0,5 \times 0,8^{n} + 0,5 \quad \text{c'est } P_{n+1}
\end{aligned}$$

Conclusion : on a prouvé que l'affirmation P_1 est vraie, et que, n étant un naturel non nul, la véracité de P_n entraîne celle de P_{n+1}. En vertu du principe de récurrence, on peut conclure que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5$.

Autrement dit, on a établi par récurrence une expression explicite du terme général p_n.

c. Pour tout n entier naturel non nul, on a : $$\begin{aligned} 0,5 \times 0,8^{n-1} &= \frac{0,5}{0,8} \times 0,8^{n}\\ &= 0,625 \times 0,8^{n}. \end{aligned}$$

Comme on a : $-1 < 0,8 < 1$ la propriété des limites de suites géométriques donne : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,625 \times 0,8^n = 0$.

Puis, par limite de la somme, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 0,625 \times 0,8^n + 0,5 = 0,5$.

Ainsi, quand le nombre de machines tend vers plus l'infini, la probabilité que la dernière machine détienne la valeur 1 tend vers 0,5.

Partie B

1. L'instruction de la ligne 5 est une instruction conditionnelle : elle indique l'instruction de la ligne suivante ne s'exécutera qu'à la condition que le test `rand() < 0.1` renvoie la valeur `True`.

Or, l'instruction `rand()` renvoie un nombre aléatoire dans $[0 ; 1[$, donc la probabilité que ce nombre soit strictement inférieur à 0,1, c'est-à-dire dans l'intervalle $[0 ; 0,1[$ est proportionnelle à l'amplitude de cet intervalle, la probabilité que cela arrive est donc de $\dfrac{0,1-0}{1-0} = 0,1$.

La ligne 5 va rendre l'exécution de la ligne 6 aléatoire, avec une probabilité que la ligne 6 s'exécute égale à 0,1.

C'est-à-dire que la ligne 6 doit avoir pour effet de "mal transmettre" la dernière donnée détenue, qui est stockée dans la variable `donnee`. Cette variable contient 0 ou 1. Si elle contenait 0, après la ligne 6 elle contiendra $1-0=1$, soit la valeur contraire. Si elle contenait 1, après la ligne 6, elle contiendra $1-1=0$, là encore, la valeur contraire.

La ligne 6 a donc pour effet de modifier la donnée, pour simuler une transmission contraire.

2. Si l'appel `simulation(4)` renvoie `[1,1,1,1,1]`, cela signifie que l'on a eu 4 transmissions fidèles, entre 5 machines.

La probabilité que cela arrive est donc :

$0,9\times 0,9\times 0,9\times 0,9 = 0,9^4 = 0{,}656\,1 \approx 0,656$.

De façon analogue l'appel `simulation(6)` renvoie une simulation de 6 transmissions entre 7 machines.

Si l'appel renvoie `[1,0,1,0,0,1,1]`, cela signifie que les trois premières transmissions sont contraires (de 1 à 0, puis de 0 à 1, puis de 1 à 0), la quatrième transmission est fidèle (de 0 à 0), la cinquième est contraire (de 0 à 1) et la sixième et dernière est fidèle (de 1 à 1).

La probabilité que cela arrive est donc :

$0,1\times 0,1\times 0,1\times 0,9\times 0,1\times 0,9 = 0,9^2\times 0,1^4 = 8,1\times 10^{-5}\approx 0,000$.

À 10^{-3} près, la probabilité d'obtenir `[1,1,1,1,1]` est d'environ 0,656, celle d'obtenir `[1,0,1,0,0,1,1]` est d'environ 0,000.

Exercice 2 — 5 points

1. Par lecture graphique, il semble que :

- la fonction f est strictement croissante sur son ensemble de définition ;
- $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$, $\mathscr{C}_f$ semblant présenter une asymptote d'équation $x = 2$;
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Résolvons l'équation sur $]2~;~+\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff x\ln(x-2) = 0\\ &\iff x = 0 \text{ ou bien } \ln(x-2) = 0 \quad \text{d'après la règle du produit nul}\\ &\iff \ln(x-2) = 0 \quad \text{car } x > 2 \text{ donc } x \neq 0\\ &\iff \exp\big(\ln(x-2)\big) = \exp(0) \quad \text{car exp est strictement croissante sur } \mathbb{R}\\ &\iff x-2 = 1\\ &\iff x = 3 \end{aligned}$$

L'équation a une unique solution : $x = 3$.

3. On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} x-2 = 0^+$ et donc, en posant $y = x-2$, par composition, on en déduit : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \ln(x-2) = \lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \ln(y) = -\infty$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} x = 2$, donc, par limite du produit : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} [x\times\ln(x-2)] = -\infty$.

Cela confirme à la fois la conjecture sur la limite en 2 (en effet, comme f n'est définie que sur $]2~;~+\infty]$, la limite en 2 est la limite à droite en 2), et cela confirme aussi la conjecture sur l'asymptote d'équation $x = 2$, qui est l'interprétation graphique de cette limite.

4. Si $u : x \longmapsto x-2$ alors $u' : x \longmapsto 1$.

Ainsi $x \longmapsto \ln(x-2)$ est la composée $\ln\circ u$ et donc se dérive en :

$x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{1}{x-2}$.

On dérive un produit de fonctions dérivables sur $]2\,;\,+\infty[$.

Pour tout réel strictement supérieur à 2, on a :

$f'(x) = 1 \times \ln(x-2) + x \times \dfrac{1}{x-2} = \ln(x-2) + \dfrac{x}{x-2}$.

On arrive bien à l'expression annoncée pour $f'(x)$.

5. **a.** On a : $\quad g'(x) = f''(x) = \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1 \times (x-2) - x \times 1}{(x-2)^2}$

$$= \dfrac{1}{(x-2)} + \dfrac{-2}{(x-2)^2} = \dfrac{x-2}{(x-2)^2} + \dfrac{-2}{(x-2)^2}$$

$$= \dfrac{x-4}{(x-2)^2}$$

On arrive bien à la forme demandée.

b. $g'(x)$ est le quotient de $(x-4)$ par $(x-2)^2$.

Le dénominateur étant le carré d'un réel non nul, il est strictement positif, donc $g'(x)$ a le signe de $(x-4)$. On peut donc établir le tableau de variations suivant :

x	2		4		$+\infty$
signe de $x-4$		$-$	0	$+$	
signe de $g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de g	‖ $+\infty$	$\searrow$	$2+\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

On a : $\quad g(4) = f'(4) = \ln(4-2) + \dfrac{4}{4-2} = \ln(2) + \dfrac{4}{2} = 2 + \ln(2)$.

c. En observant le tableau de variations précédent, on a :

$2 > 1 \implies \ln(2) > 0 \quad$ donc on a $g(4) \geqslant 2 > 0$.

Donc, les variations de g indiquent que g atteint un minimum égal à $g(4) > 0$, pour $x = 4$.

On en déduit que la fonction g est à valeurs strictement positives sur $]2\,;\,+\infty[$.

d. Puisque g est la fonction dérivée f', on en déduit que f' est à valeurs strictement positives sur $]2\,;\,+\infty[$, et donc que f est strictement croissante sur $]2\,;\,+\infty[$.

6. On a établi les variations de $g = f'$ à la question **5. b.** :

- sur $]2\,;\,4]$, f' est décroissante, donc f est concave;
- sur $[4\,;\,+\infty[$, f' est croissante, donc f est convexe.

f change de convexité en $x = 4$, donc le point de coordonnées $\big(4\,;\,f(4)\big)$, est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

On a $f(4) = 4 \times \ln(4-2) = 4\ln(2) = \ln\left(2^4\right) = \ln(16)$.

Les coordonnées exactes du point d'inflexion sont donc $(4\,;\,\ln(16))$.

7. $\mathscr{C}_f$ admet une tangente de coefficient directeur égal à 3 au point d'abscisse x si et seulement si $f'(x) = 3$, ou encore $g(x) = 3$.

On a $g(4) = 2 + \ln(2) \approx 2,7$. On a donc :

- Sur $]2\,;\,4]$, g est strictement décroissante, et continue (car dérivable), et 3 est une valeur strictement comprise entre $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = +\infty$ et $g(4) = 2+\ln(2) \approx 2,7$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, il existe une unique solution à l'équation $g(x) = 3$ dans l'intervalle $]2\,;\,4]$, notée α ;
- De façon analogue, sur $]4\,;\,+\infty[$, g est strictement croissante, et continue (car dérivable), et 3 est une valeur strictement comprise entre $\lim\limits_{x\to 4} g(x) \approx 2,7$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} = +\infty$. Il existe aussi une unique solution à l'équation $g(x) = 3$ dans l'intervalle $]4\,;\,+\infty[]$, notée β ;

Ainsi, l'équation $f'(x) = 3$ équivalente à $g(x) = 3$ admet exactement deux solutions α et β sur $]2\,;\,+\infty[$.

Il y a donc exactement deux valeurs de x (α et β) pour lesquelles la tangente à $\mathscr{C}_f$ a un coefficient directeur égal à 3.

Exercice 3 — 5 points

1. On détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs ont des coordonnées qui sont clairement non proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires, et donc les trois points A, B et C ne sont pas alignés : ils déterminent bien un plan.

2. Comme le repère est orthonormal, en utilisant les coordonnées des vecteurs précédents, qui sont non nuls, on va calculer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -2\times(-1) + 1\times(-2) + 5\times 0 = 2 + -2 + 0 = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non nuls, mais leur produit scalaire l'est, donc les droites (AB) et (AC) sont orthogonales, et donc le triangle ABC est bien rectangle en A.

3. **a.** Calculons le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, ces deux vecteurs formant une base du plan (ABC).

- $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\times(-2) + (-1)\times 1 + 1\times 5 = -4 - 1 + 5 = 0$;
- $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times(-1) + (-1)\times(-2) + 1\times 0 = -2 + 2 + 0 = 0$;

$\overrightarrow{u}$ est donc orthogonal à deux vecteurs formant une base de (ABC), il est donc orthogonal à (ABC).

Toute droite dirigée par $\overrightarrow{u}$, et donc Δ, est donc orthogonale à (ABC).

b. $\overrightarrow{u}$ est donc un vecteur normal au plan (ABC), d'après la question précédente.

Par propriété, on en déduit qu'une équation de (ABC) est de la forme :

$2x - y + z + d = 0$ où d est un réel.

$$\begin{aligned} \mathrm{A} \in (\mathrm{ABC}) &\iff 2x_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{A}} + d = 0 \\ &\iff 2 \times 1 - 3 + 0 + d = 0 \\ &\iff -1 + d = 0 \\ &\iff d = 1 \end{aligned}$$

Une équation de (ABC) est donc bien $2x - y + z + 1 = 0$.

c. Δ contient D$(-2~;~2~;~1)$ et est dirigée par $\overrightarrow{u}$, donc, par propriété, une représentation paramétrique de Δ est : $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

4. Considérons M_t, le point de paramètre t sur la droite Δ.

$$\begin{aligned} M_t \in (\mathrm{ABC}) &\iff 2x_{M_t} - y_{M_t} + z_{M_t} + 1 = 0 \\ &\iff 2(-2 + 2t) - (2 - t) + (1 + t) + 1 = 0 \\ &\iff -4 + 4t - 2 + t + 1 + t + 1 = 0 \\ &\iff 6t - 4 = 0 \\ &\iff t = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Δ n'a qu'un seul point sur (ABC) (c'est normal, comme elle est orthogonale au plan, elle est sécante au plan), c'est le point de paramètre $\frac{2}{3}$ dans la représentation, c'est-à-dire que c'est le point de coordonnées $\left(-2 + 2 \times \frac{2}{3}~;~2 - \frac{2}{3} ; 1 + \frac{2}{3}\right)$, soit $\left(-\frac{2}{3}~;~\frac{4}{3}~;~\frac{5}{3}\right)$.

On reconnaît les coordonnées du point H. H est donc l'intersection de Δ et (ABC), c'est donc l'intersection du plan (ABC) avec la droite passant par D et orthogonale à (ABC) : H est le projeté orthogonal de D sur (ABC).

5. **a.** On est dans un repère orthonormé :

$$\begin{aligned} \mathrm{DH} &= \sqrt{\left(-\frac{2}{3} - (-2)\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - 1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{\sqrt{4 \times 6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

On arrive bien à la distance annoncée : $\mathrm{DH} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

b. Pour le tétraèdre ABCD, on va choisir comme base le triangle ABC, rectangle en A, et la hauteur correspondante, est donc la distance de H au plan (ABC), c'est-à-dire la distance DH.

Pour calculer B, l'aire de la base, on va utiliser comme base de ABC la longueur AB, et comme hauteur correspondante, la longueur AC (car ABC est rectangle en A).

Donc : $$\begin{aligned} B &= \frac{\mathrm{AB} \times \mathrm{AC}}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 5^2} \times \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 0^2}}{2} = \frac{\sqrt{30} \times \sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{150}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Le volume du tétraèdre est donc : $V = \dfrac{1}{3} \times B \times h = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{5}{2}\sqrt{6} \times \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$
$= \dfrac{10}{3}$

Le volume du tétraèdre est donc de $\dfrac{10}{3} \approx 3,33$.

6. Par lecture de la représentation paramétrique de d, on peut dire que la droite d est dirigée par : $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

Comme le repère est orthonormé, on a : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u'} = 2 \times (-2) + (-1) \times -3 + 1 \times 1$
$= -4 + 3 + 1 = 0$

$\overrightarrow{u'}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ qui est lui-même un vecteur normal à (ABC). On en déduit que $\overrightarrow{u'}$ est un vecteur du plan (ABC). Ainsi, la droite d est une droite parallèle au plan (ABC).

Remarque : bien que ça ne soit pas demandé ici, on peut préciser : d passe par le point E de coordonnées $(1;0;1)$. Ces coordonnées ne vérifiant pas l'équation de (ABC), on en déduit que E n'appartient pas au plan, et donc que d est strictement parallèle à (ABC) (elle n'est pas incluse dans le plan).

Exercice 4 — 5 points

1. Affirmation 1 : Fausse.

On a $\text{Card}(E) = 7$ et $\text{Card}(F) = 10$.

Les 3-uplets d'éléments distincts de E, ce sont des arrangements de 3 éléments distincts (l'ordre compte, sans répétition) choisis parmi 7. Il y en a donc :

$\dfrac{7!}{(7-3)!} = \dfrac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$.

Les combinaisons à 4 éléments de F sont des ensembles (sans ordre, sans répétition) de 4 éléments choisis parmi 10. Il y en a :

$\dbinom{10}{4} = \dfrac{10!}{(10-4)! \times 4!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 10 \times 3 \times 1 \times 7 = 210$.

Il y a donc exactement le même nombre, et pas davantage, de 3-uplets d'éléments distincs de E que de combinaisons à 4 éléments de F.

2. Affirmation 2 : Vraie.

En effet, le carré ABCD a un côté de 3 unités de longueurs, donc son aire est de :

$3^2 = 9$ unités d'aire.

Par ailleurs, la zone hachurée est délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentant la fonction carré et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 3$. La fonction carré étant positive, l'aire, en unités d'aire est - égale à l'intégrale :

$\displaystyle\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = \left(\frac{1}{3} \times 3^3\right) - \left(\frac{1}{3} \times 0^3\right) = 9 - 0 = 9$ unités d'aire.

Les deux zones ont donc bien la même aire, de 9 unités d'aire.

3. **Affirmation 3 : Fausse.**

   Pour tout x dans [1 ; 2], on pose : $\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \\ v(x) = \ln(x) \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = x \\ v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

   On a alors : $$\begin{aligned} J &= \int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^2 u'(x) \times v(x)\,\mathrm{d}t \quad \text{donc, par intégration par parties :} \\ &= \Big[u(x) \times v(x)\Big]_1^2 - \int_1^2 u(x) \times v'(x)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 \times \ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}t \\ &= \left(\frac{1}{2} \times 2^2 \times \ln(2)\right) - \left(\frac{1}{2} \times 1^2 \times \ln(1)\right) - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln(2) - 0 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 \\ &= 2\ln(2) - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2} \times 2^2\right) - \left(\frac{1}{2} \times 1^2\right)\right] \\ &= 2\ln(2) - \frac{3}{4} \approx 0{,}636\,29 \end{aligned}$$

   Or $\dfrac{7}{11} \approx 0{,}636\,36$, donc $J \neq \dfrac{7}{11}$.

4. **Affirmation 4 : Vraie.**

   D'une part, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, on a :

   $f'(x) = \mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{2x}$.

   D'autre part, pour tout réel x, on a :

   $2f(x) - \mathrm{e}^x = 2\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}\right) - \mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{2x}$

   On constate donc que, pour tout x réel, on a : $f'(x) = 2f(x) - \mathrm{e}^x$.

   Autrement dit, la fonction f vérifie l'équation différentielle (E), donc f est bien une solution de (E).

5. **Affirmation 5 : Vraie.**

   Soit x un réel dans $[0;1[$. On a donc : $(x-1) \in [-1;0[$.

   Autrement dit, le réel $(x-1)$ est **strictement négatif**.

   Ainsi, comme on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$ et que $(x-1) < 0$, on en déduit, par limite du produit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (x-1)\mathrm{e}^n = -\infty$.

   Par limite de la somme, on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (x-1)\mathrm{e}^n + 1 = -\infty$.

   Comme la fonction cos est bornée par 1 et -1, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$,

   et donc notamment : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \cos(n) \leqslant 1 \implies (x-1)\mathrm{e}^n + \cos(n) \leqslant (x-1)\mathrm{e}^n + 1$.

   Comme on a établi que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (x-1)\mathrm{e}^n + 1 = -\infty$ cela implique, par comparaison, que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (x-1)\mathrm{e}^n + \cos(n) = -\infty$.

   La suite (u_n) diverge bien vers $-\infty$.