Corrigé du baccalauréat Asie

Sujet 1 – 11 juin 2025

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Affirmation 1 : Fausse.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\alpha-1\\2\\\alpha\end{pmatrix}$.

Quel que soit le réel α, ces coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires, et ils définissent bien un plan.

Cependant, le repère étant orthonormé, on peut utiliser les coordonnées pour calculer un produit scalaire : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{\jmath} = (\alpha-1)\times 0+2\times 1+\alpha\times 0 = 2$.

On constate que les vecteurs $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux, donc $\overrightarrow{\jmath}$ n'est pas un vecteur normal au plan (ABC) : cette partie de l'affirmation est donc fausse.

Affirmation 2 : Fausse.

En interprétant le système de représentation paramétrique, la droite (d) est dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$. On rappelle : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\alpha-1\\2\\\alpha\end{pmatrix}$.

Pour que les droites soient parallèles, il faudrait que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient proportionnels, or, ici, ils ont la même ordonnée, donc ils devraient être égaux.

Or, si on choisit α égal à 1, les altitudes seront égales, mais pas les abscisses, si on choisit α égal à 2, alors les abscisses seront égales, mais pas les altitudes, et, pour tout autre réel α, les abscisses et altitudes seront différentes entre les deux vecteurs.

Quel que soit le réel α, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc non colinéaires, et les droites ne sont pas parallèles : l'affirmation est donc fausse.

Affirmation 3 : Vraie.

O étant l'origine du repère, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ sont celles du point A, donc celles de $\overrightarrow{AO}$ sont : $\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$. On rappelle $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

On a donc, dans le repère orthonormé : $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB} = -1\times 1+(-1)\times 0+0\times 0 = -1$.

Par ailleurs, on a : $AO = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{2}$, et $AB = \sqrt{1^2+0^2+0^2} = \sqrt{1} = 1$.

On a donc aussi : $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB} = AO\times AB\times\cos\left(\widehat{OAB}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\widehat{OAB}\right)$.

En égalant les deux expressions du produit scalaire, il vient : $-1 = \sqrt{2}\cos\left(\widehat{OAB}\right)$,

ce qui équivaut à : $\cos\left(\widehat{OAB}\right) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$.

On reconnaît ici l'opposé du cosinus d'un angle de $\dfrac{\pi}{4}$, ce qui est donc le cosinus d'un angle de mesure $\pi-\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$, soit effectivement 135°.

Affirmation 4 : Fausse.

Avec les coordonnées données pour H et la représentation paramétrique de (d), pour avoir $x_H = 1+t$, il faut avoir $t = 0$, et donc les ordonnées et altitudes ne correspondront pas : le point H n'est pas sur la droite (d), donc il n'est pas le projeté orthogonal de A sur (d).

Affirmation 5 : Vraie
Soit t un réel quelconque et M_t le point de paramètre t sur la droite (d).
La distance $\text{O}M_t$ est donnée par :
$\text{O}M_t = \sqrt{(1+t)^2+(2t)^2+(-t)^2} = \sqrt{1+2t+t^2+4t^2+t^2} = \sqrt{6t^2+2t+1}$.

On a donc :
$$\begin{aligned}\text{O}M_t = 1 &\iff \sqrt{6t^2+2t+1} = 1\\ &\iff 6t^2+2t+1 = 1\\ &\iff 6t^2+2t = 0\\ &\iff 2t(3t+1) = 0\\ &\iff 2t = 0 \quad \text{ou} \quad 3t+1 = 0\\ &\iff t = 0 \quad \text{ou} \quad t = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

L'équation a deux solutions, il y a donc exactement deux points de la droite (d) qui sont sur la sphère : les points de paramètre 0 et $-\frac{1}{3}$, l'affirmation est vraie.

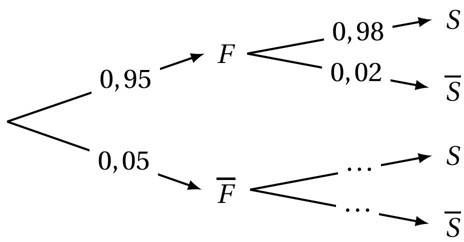
EXERCICE 2 — 5 points

Puisqu'on choisit un jouet au hasard dans la production, on est en situation d'équiprobabilité, et donc les proportions sont assimilables à des probabilités.

Partie A

1. D'après l'énoncé 95 % des jouets réussissent le test de fabrication et, parmi les jouets qui réussissent le test de fabrication, 98 % réussissent le test de sécurité, donc $P(F) = 0,95$ et $P_F(S) = 0,98$.

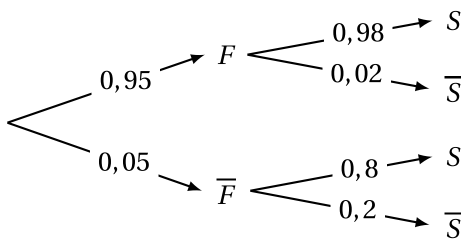
2. **a.** Un arbre pondéré qui illustre la situation avec les données disponibles dans l'énoncé (ainsi que les probabilités d'évènement contraire, triviales) est :



   b. D'après l'énoncé 1 % des jouets ne réussissent aucun des deux tests donc $P\left(\overline{F} \cap \overline{S}\right) = 0,01$.

   $P_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right) = \dfrac{P\left(\overline{F} \cap \overline{S}\right)}{P\left(\overline{F}\right)} = \dfrac{0,01}{0,05} = 0,2$

   L'arbre complet est donc :



3. $P\left(F \cap S\right) = P(F) \times P_F(S) = 0,95 \times 0,98 = 0,931$

   La probabilité que le jouet choisi réussisse les deux tests est égale à 0,93.

4. Les évènements F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(S) = P\big(F \cap S\big) + P\big(\overline{F} \cap S\big)$

On a donc : $P(S) = 0,931 + 0,05 \times 0,8 = 0,971$.

La probabilité que le jouet réussisse le test de sécurité vaut, $0,97$ arrondi au centième.

5. $P_S(F) = \dfrac{P(F \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,931}{0,971} \approx 0,958\,8$

La probabilité qu'un jouet réussisse le test de fabrication sachant qu'il a réussi le test de sécurité vaut $0,96$, arrondi au centième.

Partie B

1. S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,95$ donc :

$E\left(S_n\right) = n \times p = 0,95n$ et $V(X) = np(1-p) = n \times 0,95 \times 0,05 = 0,047\,5n$.

2. Dans cette question, on pose $n = 150$.

a. $P\left(S_{150} = 145\right) = \dbinom{150}{145} \times 0,95^{145} \times 0,05^{150-145}$.

$= 591\,600\,030 \times 0,95^{145} \times 0,05^{5}$

$\approx 0,108\,84$

Finalement, avec les consignes d'arrondi : $P\left(S_{150} = 145\right) \approx 0,109$

Dans le contexte de l'exercice, dans environ 10,9% des cas, 145 jouets sur les 150 du lot réussissent le test de fabrication.

b. 94% des jouets de ce lot correspond à 141 jouets.

À l'aide de la calculatrice : $P\left(S_{150} \geqslant 141\right) \approx 0,780\,88$

La probabilité qu'au moins 94% des jouets de ce lot réussissent le test de fabrication vaut $0,781$ à 10^{-3} près.

3. Dans cette question, l'entier naturel non nul n n'est plus fixé.

a. D'après les propriétés sur l'espérance d'une somme de variables aléatoires :

$E\big(F_n\big) = E\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{E\left(S_n\right)}{n} = \dfrac{0,95n}{n} = 0,95$.

D'après les propriétés sur la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes :

$V\big(F_n\big) = V\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{V\left(S_n\right)}{n^2} = \dfrac{0,047\,5n}{n^2} = \dfrac{0,0475}{n}$.

b. L'évènement « $0,93 < F_n < 0,97$ » revient à $|F_n - 0,95| < 0,02$ et

$P\Big(|F_n - 0,95| < 0,02\Big) = 1 - P\Big(|F_n - 0,95| \geqslant 0,02\Big)$.

On veut que $P\Big(|F_n - 0,95| \geqslant 0,02\Big) \geqslant 0,96$

On veut donc que $P\Big(|F_n - 0,95| < 0,02\Big) \leqslant 0,04$

Or, pour tout réel $t > 0$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$P\Big(|F_n - E\big(F_n\big)| \geqslant t\Big) \leqslant \dfrac{V\big(F_n\big)}{t^2}$

Pour $t = 0,02$ on obtient : $P\Big(|F_n - 0,95| \geqslant 0,02\Big) \leqslant \dfrac{0,475}{n \times 0,02^2}$.

On veut donc que : $\dfrac{475}{4n} \leqslant 0,04 \iff \dfrac{11875}{4} \leqslant n$

$$\iff 2968 + \frac{3}{4} \leqslant n$$

L'inégalité est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 2\,969$.

À partir de $2\,969$ jouets prélevés, la probabilité de l'évènement I est supérieure ou égale à $0,96$.

EXERCICE 3 **5 points**

Partie A

1. On a : $u_2 = 2 + 0,8u_1 = 2 + 0,8 \times 2 = 2 + 1,6 = 3,6$.

   Après deux prises du médicament, le patient a 3,6 mL de médicament dans son organisme.

2. Pour tout entier naturel non nul n, on pose P_n, l'affirmation : « $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$ ».

   Initialisation : On a, d'une part : $u_1 = 2$, d'après l'énoncé.

   Et, d'autre part : $10 - 8 \times 0,8^{1-1} = 10 - 8 \times 0,8^0 = 10 - 8 \times 1 = 2$.

   On constate que pour $n = 1$, l'affirmation P_1 est vraie.

   Hérédité : Pour n entier naturel non nul, on suppose l'affirmation P_n vraie, c'est-à-dire : « $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$ ».

   On veut montrer que cela implique que l'affirmation P_{n+1} est vraie.

   On a : $u_{n+1} = 2 + 0,8u_n$ par définition de la suite (u_n)

   $= 2 + 0,8\Big(10 - 8 \times 0,8^{n-1}\Big)$ par hypothèse de récurrence

   $= 2 + 0,8 \times 10 - 0,8 \times 8 \times 0,8^{n-1}$

   $= 2 + 8 - 8 \times 0,8 \times 0,8^{n-1}$

   $= 10 - 8 \times 0,8 \times 0,8^{n}$ c'est l'égalité P_{n+1}

   Conclusion : L'affirmation est vraie au rang 1, et, pour tout rang naturel non nul n, si P_n est vraie alors P_{n+1} l'est aussi, donc, en vertu du principe de démonstration par récurrence, on a donc démontré que P_n- est vraie pour tout entier naturel n non nul, autrement dit, on a établi une expression explicite du terme général de la suite.

3. Par connaissance des limites des suites géométriques, comme on a $-1 < 0,8 < 1$, on en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^{n-1} = \lim\limits_{n \to +\infty} -8 \times 0,8^{n-1} = 0$.

   Par limite de la somme, on en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} = 10 + 0 = 10$.

   La suite (u_n) converge donc vers 10.

   Dans le contexte de l'exercice, cela signifie qu'au bout d'un nombre important de prises de ce médicament, l'organisme du patient contiendra une quantité de médicament qui tend vers les 10 mL.

4. Soit N un entier naturel non nul, étudions l'inéquation :

$$u_N \geqslant 10 \iff 10 - 8 \times 0,8^{N-1} \geqslant 10$$
$$\iff -8 \times 0,8^{N-1} \geqslant 0$$

Le membre de gauche est un réel strictement négatif (car 8 et 0,8 sont strictement positifs) et ne peut être supérieur ou égal à 0.

L'inéquation n'admet donc pas de solution.

Dans le contexte de l'exercice, cela peut s'interpréter sur le comportement de la suite, qui est donc majorée (strictement) par 10, ou par la quantité de médicament dans l'organisme de l'individu qui est toujours strictement inférieure à 10 mL, quel que soit le nombre de prises du médicament enchaînées.

5. On résout une inéquation différente, avec n un entier naturel non nul :

$$u_n > 9 \iff 10 - 8 \times 0,8^{n-1} > 9$$
$$\iff -8 \times 0,8^{n-1} > -1$$
$$\iff 0,8^{n-1} < \frac{1}{8} \quad \text{car } -8 < 0$$
$$\iff \ln\left(0,8^{n-1}\right) < \ln\left(\frac{1}{8}\right) \quad \text{la fonction ln étant strictement croissante sur } \mathbb{R}^{*+}$$
$$\iff (n-1)\ln(0,8) < -\ln(8) \quad \text{d'après les propriétés de la fonction ln}$$
$$\iff n - 1 > -\frac{\ln(8)}{\ln(0,8)} \quad \text{car } \ln(0,8) < 0$$
$$\iff n > 1 - \frac{\ln(8)}{\ln(0,8)}$$

Or, $1 - \dfrac{\ln(8)}{\ln(0,8)} \approx 10,3$.

Comme on résout pour n entier naturel non nul, les solutions sont les entiers supérieurs ou égaux à 11.

C'est à partir de 11 prises successives du médicament que la quantité de celui-ci dans l'organisme du patient dépasse strictement les 9 mL.

Partie B

1. On a $S_2 = \dfrac{u_1 + u_2}{n} = \dfrac{2 + 3,6}{2} = 2,8$.

2. Pour donner l'expression explicite de la somme, on utilisera l'expression explicite du terme général de la suite (u_n), établi à la question **A. 2.**.

La somme est une somme de n termes consécutifs, de u_1 à u_n :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 10 - 8 \times 0,8^0 + 10 - 8 \times 0,8^1 + \cdots + 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$$
$$= 10 + 10 + \cdots + 10 - 8 \times \left(0,8^0 + 0,8^1 + \cdots + 0,8^{n-1}\right)$$
$$= 10 \times n - 8 \times 1 \times \frac{1 - 0,8^n}{1 - 0,8} \quad \text{formule connue}$$
$$= 10n - \frac{8}{0,2} \times \left(1 - 0,8^n\right)$$
$$= 10n - 40 \times \left(1 - 0,8^n\right)$$
$$= 10n - 40 + 40 \times 0,8^n \quad \text{en développant}$$

On arrive donc bien à l'expression annoncée.

3. On déduit de la question précédente que, pour tout n entier naturel non nul, on a : $S_n = 10 - \dfrac{40}{n} + \dfrac{40}{n} \times 0,8^n$.

On a donc, par limite du quotient : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \dfrac{40}{n} = 0$,

de plus, par limite des suites géométriques, comme $-1 < 0,8 < 1$: $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$.

Ainsi, par limite de la somme et du produit, on en déduit :

$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} 10 - \dfrac{40}{n} + \dfrac{40}{n} \times 0,8^n = 10$.

La quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du patient tend elle aussi vers 10 mL.

4. La fonction mystère est une fonction de seuil : elle détermine l'indice seuil pour lequel la valeur de S_n franchit le seuil `k` pour la première fois.

`mystere(9)` renvoie donc le premier nombre entier naturel non nul n pour lequel la quantité moyenne de médicament dans l'organisme du patient depuis le début de la prise devient supérieure ou égale à 9 mL.

5. Cette valeur est donc nécessairement strictement supérieure à 10, puisque l'on a établi à la fin de la **partie A** que c'est seulement à la onzième prise du médicament que la quantité **à ce moment là** dans le corps du patient dépasse les 9 mL.

Avant $n = 11$, les valeurs de la suite (u_n) sont donc toutes inférieures strictement à 9, et donc leur moyenne le sera aussi.

Il est donc impossible que S_n soit supérieur à 9 pour tout entier naturel non nul n, pour n inférieur ou égal à 10.

La fonction `mystère` doit donc renvoyer une valeur (un indice) strictement supérieur à 10. Elle renverra en réalité 40 (on a $S_{39} \approx 9,97$ et $S_{40} \approx 9,000\,1$).

EXERCICE 4 **5 points**

On considère f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\text{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ et on appelle C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \text{e}^{\sqrt{x}}$

a. La fonction g est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, donc $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$,

$g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times \text{e}^{\sqrt{x}} = \dfrac{\text{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = f(x)$.

b. La fonction f est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, donc $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\text{e}^{\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x} - \text{e}^{\sqrt{x}} \times 2\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = \dfrac{\text{e}^{\sqrt{x}} - \dfrac{\text{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{x}\text{e}^{\sqrt{x}} - \text{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x} = \dfrac{\text{e}^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{4x\sqrt{x}}.$$

2. **a.** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \text{e}^{\sqrt{x}} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0} 2\sqrt{x} = 0$ avec $\dfrac{\text{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} > 0$ donc $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

b. Donc C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

3. **a.** D'après les croissances comparées, $\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^u}{u} = +\infty$ donc par composition de limites (en posant $u(x) = \sqrt{x}$) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b. $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $\mathrm{e}^{\sqrt{x}} > 0$ et $4x\sqrt{x} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $\sqrt{x} - 1$.
$\sqrt{x} - 1 \geqslant 0 \iff \sqrt{x} \geqslant 1 \iff x \geqslant 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{\mathrm{e}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

c. La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ à valeurs dans $\left[\dfrac{\mathrm{e}}{2} ; +\infty\right[$. Or $2 \in \left[\dfrac{\mathrm{e}}{2} ; +\infty\right[$ (car $\dfrac{\mathrm{e}}{2} < 2$) donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution notée α dans $[1;+\infty[$.
À la calculatrice : $\alpha \approx 4,6$.

4. $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. $\forall x \in [1 ; 2]$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$. En remarquant que la dérivée de la fonction g est la fonction f, donc g est une primitive de f.
Donc $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = [g(x)]_1^2 = \left[\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\right]_1^2 = \mathrm{e}^{\sqrt{2}} - \mathrm{e}$

b. L'aire du domaine $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$ est égale à $\mathrm{e}^{\sqrt{2}} - \mathrm{e}$.
I est donc l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

5. $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(x - 3\sqrt{x} + 3)}{8x^2\sqrt{x}}$

a. On pose $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $X = \sqrt{x}$.
$x - 3\sqrt{x} + 3 = X^2 - 3X + 3$.
$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3 < 0$ donc $\forall X \in]0 ; +\infty[$, $X^2 - 3X + 3 > 0$ donc $\forall x \in]0;+\infty[$, $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$.

b. $\forall x \in]0;+\infty[$, $e^{\sqrt{x}} > 0$ et $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ et $8x^2\sqrt{x} > 0$ donc $f''(x) > 0$.
La fonction f est convexe sur $]0 ; +\infty[$.