Corrigé du baccalauréat Métropole 9 septembre 2025

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1 **5 points**

Partie A

1. Dérivons la fonction u : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) = 1 \times \mathrm{e}^{-0,4t} + t \times (-0,4)\,\mathrm{e}^{-0,4t}$

$$= \mathrm{e}^{-0,4t} - 0,4t\,\mathrm{e}^{-0,4t}$$

$$= (1 - 0,4t)\,\mathrm{e}^{-0,4t}$$

Vérifions que u est solution de (E) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) + 0,4u(t) = (1 - 0,4t)\,\mathrm{e}^{-0,4t} + 0,4 \times t\,\mathrm{e}^{-0,4t}$$

$$= \mathrm{e}^{-0,4t} - 0,4t\,\mathrm{e}^{-0,4t} + 0,4t\,\mathrm{e}^{-0,4t}$$

$$= \mathrm{e}^{-0,4t}$$

Donc u est bien solution de (E).

2. a. Soit $g = f - u$ avec g solution de (H).

Comme g est une solution de (H), on a : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) + 0,4g(t) = 0$.

Or $g = f - u$, donc $g' = f' - u'$.

Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) + 0,4g(t) = 0 \iff f'(t) - u'(t) + 0,4\big(f(t) - u(t)\big) = 0$$

$$\iff f'(t) - u'(t) + 0,4f(t) - 0,4u(t) = 0$$

$$\iff f'(t) + 0,4f(t) = u'(t) + 0,4u(t)$$

$$\iff f'(t) + 0,4f(t) = \mathrm{e}^{-0,4t}$$

La dernière équivalence se justifie car u étant une solution particulière de (E), on a bien : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) + 0,4u(t) = \mathrm{e}^{-0,4t}, \quad$ où $C \in \mathbb{R}$.

Donc f est solution de (E).

b. L'équation (H) : $y' + 0,4y = 0$ est de la forme $y' = -0,4y$.

Les solutions sont les fonctions de la forme : $g : t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-0,4t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

c. D'après les questions précédentes, f est solution de (E) si et seulement si $g = f - u$ est solution de (H).

Donc si et seulement si on a : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) - u(t) = C\,\mathrm{e}^{-0,4t}$

Les solutions de (E) sont les fonction f telles que : $f : t \longmapsto t\,\mathrm{e}^{-0,4t} + C\,\mathrm{e}^{-0,4t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

C'est-à-dire les fonction f telles que : $f : t \longmapsto (t + C)\,\mathrm{e}^{-0,4t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

d. Ici, on introduit une condition initiale, on veut avoir : $f(0) = 1$.

$$f(0) = 1 \iff (0 + C)\,\mathrm{e}^{0} = 1$$

$$\iff C = 1$$

Donc la fonction f cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = (t + 1)\,\mathrm{e}^{-0,4t}$.

Partie B

On remarque que la fonction f présentée est la solution que nous avons identifiée à la **partie A**.

1. **a.** f étant une solution de l'équation (E) sur $[0\,;\,6]$, on a :

$$f' + 0,4f = \mathrm{e}^{-0,4t} \iff f' = -0,4f + \mathrm{e}^{-0,4t}$$

Et donc : $\forall t \in [0\,;\,6]$:
$$\begin{aligned} f'(t) &= -0,4f(t) + \mathrm{e}^{-0,4t} \\ &= -0,4(t+1)\,\mathrm{e}^{-0,4t} + \mathrm{e}^{-0,4t} \\ &= (-0,4t - 0,4 + 1)\,\mathrm{e}^{-0,4t} \\ &= (-0,4t + 0,6)\,\mathrm{e}^{-0,4t} \end{aligned}$$

Remarque : on peut aussi obtenir cette expression en dérivant l'expression donnée pour f avec les formules classiques de dérivation.

b. Étude du signe de $f'(t)$ sur $[0\,;\,6]$:

La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, donc $\mathrm{e}^{-0,4t} > 0$ pour tout t, donc le signe de $f'(t)$ est celui de $-0,4t + 0,6$.

$$\begin{aligned} -0,4t + 0,6 > 0 &\iff -0,4t > -0,6 \\ &\iff t < \frac{-0,6}{-0,4} \quad \text{car } -0,4 < 0 \\ &\iff t < 1,5 \end{aligned}$$

Tableau de variations :

x	0		1,5		6
signe de $f'(x)$		+	0	−	
variations de f	1	↗	$2,5\,\mathrm{e}^{-0,6}$	↘	$7\,\mathrm{e}^{-2,4}$

Avec $f(0) = 1$, $f(1,5) = 2,5\,\mathrm{e}^{-0,6} \approx 1,37$ et $f(6) = 7\,\mathrm{e}^{-2,4} \approx 0,63$.

2. **a.** Sur $[0\,;\,1,5]$, f est strictement croissante avec $f(0) = 1 > 0,7$: l'équation n'a pas de solution sur cet intervalle.

Sur $[1,5\,;\,6]$, f est continue (car dérivable) et strictement décroissante et 0,7 est une valeur intermédiaire entre $f(1,5) \approx 1,37$ et $f(6) \approx 0,63$.

D'après le corollaire aux théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(t) = 0,7$ admet une unique solution α sur $[1,5\,;\,6]$.

Finalement, l'équation $f(t) = 0,7$ admet bien une unique solution sur $[0\,;\,6]$.

b. Par approximations successives, ou en utilisant le solveur de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 5,62$ heures (on donne une approximation au centième près, car la précision attendue est à la minute, qui est un soixantième d'heure).

$0,62 \times 60 \approx 37$ minutes.

La personne est en hypoglycémie au bout de 5 heures et 37 minutes après le repas.

3. **a.** Calcul de $\displaystyle\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^6 (t+1)\,\mathrm{e}^{-0,4t}\,\mathrm{d}t$.

On pose, pour tout t dans $[0\,;\,6]$: $u(t) = t + 1$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-0,4t}$

puis $u'(t) = 1$ et $v(t) = \dfrac{1}{-0,4}\,\mathrm{e}^{-0,4t} = -2,5\,\mathrm{e}^{-0,4t}$.

Les fonctions u, u', v et v' sont continues sur $[0~;~6]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^6 (t+1)\,\mathrm{e}^{-0,4t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^6 u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \Big[u(t)v(t)\Big]_0^6 - \int_0^6 u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \Big[(t+1)\times\left(-2,5\,\mathrm{e}^{-0,4t}\right)\Big]_0^6 - \int_0^6 1\times\left(-2,5\,\mathrm{e}^{-0,4t}\right)\mathrm{d}t\\ &= \Big[-2,5(t+1)\,\mathrm{e}^{-0,4t}\Big]_0^6 + 2,5\int_0^6 \mathrm{e}^{-0,4t}\,\mathrm{d}t\\ &= \left(-2,5\times 7\,\mathrm{e}^{-2,4}\right) - \left(-2,5\times 1\times\,\mathrm{e}^{0}\right) + 2,5\Big[-2,5\,\mathrm{e}^{-0,4t}\Big]_0^6\\ &= -17,5\,\mathrm{e}^{-2,4} + 2,5 + 2,5\left[\left(-2,5\,\mathrm{e}^{-2,4}\right) - \left(-2,5\,\mathrm{e}^{0}\right)\right]\\ &= -17,5\,\mathrm{e}^{-2,4} + 2,5 - 6,25\,\mathrm{e}^{2,4} + 6,25\\ &= -23,75\,\mathrm{e}^{-2,4} + 8,75\end{aligned}$$

b. La glycémie moyenne pendant la période de six heures est donc donnée par la valeur moyenne de la fonction f (qui donne la glycémie instantanée en fonction du temps) sur l'intervalle $[0~;~6]$ (le temps étant mesuré en heures). On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{6-0}\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{6}\left(-23,75\,\mathrm{e}^{-2,4} + 8,75\right)\\ &= \frac{95\,\mathrm{e}^{-2,4} + 35}{24} \quad \text{(ceci est la valeur exacte)}.\\ &\approx 1,099 \quad \text{valeur approchée au millième}\end{aligned}$$

La glycémie moyenne lors des six heures suivant le repas est donc d'environ $1,10\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{L}^{-1}$.

c. Comme f est solution de (E), on a : $f' + 0,4f = \mathrm{e}^{-0,4t}$.

En définissant, comme à la question **3. a.**, les fonctions v' et v par :

$v'(t) = \mathrm{e}^{-0,4t}$ et $v(t) = -2,5\,\mathrm{e}^{-0,4t}$, on a :

$$\begin{aligned}f' + 0,4f = \mathrm{e}^{-0,4t} &\iff f' + 0,4f = v'\\ &\iff 0,4f = v' - f'\\ &\iff f = 2,5(v' - f')\end{aligned}$$

On en déduit qu'une primitive de f peut s'exprimer sous la forme :

$F : t \longmapsto 2,5\big(v(t) - f(t)\big)$

Soit : $\forall t \in [0~;~6],\quad$
$$\begin{aligned}F(t) &= 2,5\left(-2,5\,\mathrm{e}^{-0,4t} - (t+1)\,\mathrm{e}^{-0,4t}\right)\\ &= 2,5\big(-2,5 - (t+1)\big)\,\mathrm{e}^{-0,4t}\\ &= 2,5\big(-3,5 - t\big)\,\mathrm{e}^{-0,4t}\\ &= \big(-8,75 - 2,5t\big)\,\mathrm{e}^{-0,4t}\end{aligned}$$

On a alors :
$$\begin{aligned}\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t &= \Big[\big(-8,75 - 2,5t\big)\,\mathrm{e}^{-0,4t}\Big]_0^6\\ &= (-8,75 - 2,5\times 6)\ \mathrm{e}^{-0,4\times 6} - (-8,75 - 2,5\times 0)\ \mathrm{e}^{-0,4\times 0}\\ &= -23,75\,\mathrm{e}^{-2,4} + 8,75\end{aligned}$$

Cela confirme bien le résultat obtenu à la question **3. a.**.

Exercice 2 — 5 points

Partie A

1.
   - Le point M est défini par $\overrightarrow{\text{BM}} = \overrightarrow{\text{AB}}$, donc il appartient à la droite (AB), et donc au plan (FAB). On en déduit que la droite (FM) est une droite incluse dans le plan (FAB).
   - Le plan (FAB) contient la face ABFE du cube. Comme les faces du cube sont des carrés, on en déduit que la droite (FG) est perpendiculaire à la droite (EF) (via le carré EFGH) et à la droite (FB) (via le carré BCGF).

     Ainsi, (FG) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (FAB) : on en déduit que (FG) est orthogonale au plan (FAB).
   - Puisque (FG) est orthogonale à (FAB), elle est donc également orthogonale à toute droite du plan (FAB), notamment la droite (FM).
   - Comme F est un point d'intersection entre (FB) et (FM), les droites sont orthogonales et sécantes, on peut donc conclure que les droites sont bien perpendiculaires.
2.
   - On a déjà établi que M est sur la droite (AB), avec : $\overrightarrow{\text{AM}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{BM}} = 2\overrightarrow{\text{AB}}$;
   - Comme ABCDEFGH est un cube, on a notamment : $\overrightarrow{\text{HG}} = \overrightarrow{\text{AB}}$;
   - On en déduit donc : $\overrightarrow{\text{AM}} = 2\overrightarrow{\text{HG}}$;
   - Les droites (AM) et (HG) sont dirigées par des vecteurs directeurs colinéaires, donc elles sont parallèles, et donc coplanaires;
   - cela implique que les quatre points A, M, H et G sont également coplanaires.

Partie B

Le repère $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace : les vecteurs de base sont deux à deux orthogonaux et de même norme, car ils sont basés sur les arêtes consécutives d'un cube.

On a alors les coordonnées : A(0 ; 0 ; 0); B(1 ; 0 ; 0); C(1 ; 1 ; 0); D(0 ; 1 ; 0); E(0 ; 0 ; 1); F(1 ; 0 ; 1); G(1 ; 1 ; 1); H(0 ; 1 ; 1) et M(2 ; 0 ; 0).

1. On a : $\overrightarrow{\text{GM}} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

   et, comme A est l'origine du repère, les coordonnées de H sont aussi celles du vecteur $\overrightarrow{\text{AH}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Ces coordonnées sont clairement non proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

2. **a.** (GM) passe par le point G de coordonnées (1 ; 1 ; 1) et est dirigée par $\overrightarrow{\text{GM}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Une représentation paramétrique de (GM) est donc :

   $$\left\{\begin{array}{l} x = x_\text{G} + t x_{\overrightarrow{\text{GM}}} \\ y = y_\text{G} + t y_{\overrightarrow{\text{GM}}} \\ z = z_\text{G} + t z_{\overrightarrow{\text{GM}}} \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \qquad \text{soit} \qquad \left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

b. Cherchons s'il est possible qu'un point de paramètre t sur (GM) ait les mêmes coordonnées qu'un point de paramètre k sur (AH). Pour cela, résolvons le système :

$$S : \left\{\begin{array}{l} 1+t=0 \\ 1-t=k \\ 1-t=k \end{array}\right. \quad \text{on a : } S \iff \left\{\begin{array}{l} t=-1 \\ k=1-(-1) \\ k=1-(-1) \end{array}\right. \quad \text{Soit } S \iff \left\{\begin{array}{l} t=-1 \\ k=2 \\ k=2 \end{array}\right.$$

On en déduit que seul un point est commun aux deux droites, c'est le point de paramètre $t=-1$ sur (GM), qui est aussi le point de paramètre $k=2$ sur (AH).

Qu'on utilise une représentation paramétrique ou l'autre pour trouver les coordonnées de N, on a bien : $\mathrm{N}\big(1+(-1)\ ;\ 1-(-1)\ ;\ 1-(-1)\big)$ c'est-à-dire $\mathrm{N}(0\ ;\ 2\ ;\ 2)$.

3. a. On a : $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{\mathrm{AN}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Comme le repère est orthonormal, on peut calculer le produit scalaire à l'aide des coordonnées : $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AN}} = 2 \times 0 + 0 \times 2 + 0 \times 2 = 0$.

Les vecteurs sont donc orthogonaux, donc les droites (AM) et (AN) sont orthogonales (et sécantes en A), donc perpendiculaires :

Le triangle AMN est bien rectangle en A.

b. Le repère est orthonormal donc on peut aussi calculer des longueurs avec les coordonnées :

$\mathrm{AM} = \sqrt{2^2+0^2+0^2} = \sqrt{4} = 2$, $\quad \mathrm{AN} = \sqrt{0^2+2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Avec [AM] pour base, la hauteur correspondante est [AN] puisque le triangle est rectangle en A.

On a donc : $\mathscr{A}_{\mathrm{AMN}} = \dfrac{\mathrm{AM} \times \mathrm{AN}}{2} = \dfrac{2 \times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

4. a. J est le centre de BCGF, donc notamment le milieu de [BG] :

$\mathrm{J} = \left(\dfrac{x_{\mathrm{B}}+x_{\mathrm{G}}}{2}\ ;\ \dfrac{y_{\mathrm{B}}+y_{\mathrm{G}}}{2}\ ;\ \dfrac{z_{\mathrm{B}}+z_{\mathrm{G}}}{2}\right)$, soit $\mathrm{J}\left(\dfrac{1+1}{2}\ ;\ \dfrac{0+1}{2}\ ;\ \dfrac{0+1}{2}\right)$.

Finalement, les coordonnées de J sont : $\mathrm{J}(1\ ;\ 0,5\ ;\ 0,5)$.

b. On a : $\overrightarrow{\mathrm{FJ}} \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0,5-0 \\ 0,5-1 \end{pmatrix}$ soit : $\overrightarrow{\mathrm{FJ}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$.

Vérifions : $\overrightarrow{\mathrm{FJ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} = 0 \times 2 + 0,5 \times 0 + (-0,5) \times 0 = 0$.

et, par ailleurs : $\overrightarrow{\mathrm{FJ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AN}} = 0 \times 0 + 0,5 \times 2 + (-0,5) \times 2 = 0$.

Donc $\overrightarrow{\mathrm{FJ}}$ est orthogonal à deux vecteurs formant une base de (AMN) : c'est bien un vecteur normal au plan (AMN).

c. Puisque $\overrightarrow{\mathrm{FJ}}$ est normal à (AMN), on en déduit qu'(AMN) admet une équation de la forme : $0 \times x + 1 \times y + (-1) \times z + d = 0$, soit $y - z + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.

Comme A(0 ; 0 ; 0) est sur (AMN), ses coordonnées doivent vérifier l'équation, donc :

$0 - 0 + d = 0 \iff d = 0$.

Finalement, une équation de (AMN) est $y - z = 0$.

En testant l'appartenance de J à (AMN) : $\begin{aligned} y_{\mathrm{J}} - z_{\mathrm{J}} &= 0,5 - 0,5 \\ &= 0 \end{aligned}$

Les coordonnées de J vérifient l'équation du plan, donc J appartient au plan (AMN).

Comme $\overrightarrow{\mathrm{FJ}}$ est orthogonal au plan et que J est dans le plan, J est bien le projeté orthogonal de F sur (AMN).

5. Pour déterminer le volume du tétraèdre AMNF, on choisir comme base le triangle AMN, la hauteur correspondante étant [FJ].

$\mathcal{V}_{\text{AMNF}} = \dfrac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times \text{FJ}$ où $\text{FJ} = \sqrt{0^2 + 0,5^2 + 0,5^2} = \sqrt{0,5} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On a donc : $\mathcal{V}_{\text{AMNF}} = \dfrac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{3} \times 2 = \dfrac{2}{3}$.

Pour la pyramide BCGFM, la base (seule face non triangulaire) le carré BCGF (carré de côté 1, donc d'aire 1), la hauteur étant la distance entre M et le plan (BCG).

Comme on a déjà établi que M est un point de (AB), et que ABCDEFGH est un cube, on en déduit que (BM) est perpendiculaire au plan (BCG) et que B est donc le projeté orthogonal de M sur (BCG). La distance entre M et (BCG) est donc BM = AB = 1.

$\mathcal{V}_{\text{BCGFM}} = \dfrac{1}{3} \times 1 \times 1 = \dfrac{1}{3}$.

Donc on a bien : $\mathcal{V}_{\text{AMNF}} = 2 \times \mathcal{V}_{\text{BCGFM}}$.

Exercice 3 — 6 points

Partie A

1. Pour $x \geqslant 2$: $3x - 2 \geqslant 4 > 0$ donc f est bien définie et dérivable.

$\forall x \in [2\ ;\ +\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}} > 0$

f' est à valeurs strictement positives sur $[2\ ;\ +\infty[$, donc f est strictement croissante sur cet intervalle.

On a : $f(2) = \sqrt{3 \times 2 - 2} = \sqrt{4} = 2$

Et : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 3x + 2 = +\infty$,

donc, par composition (avec $y = 3x + 2$) : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{3x-2} = \lim_{y \to +\infty} \sqrt{y} = +\infty$.

2. **a.** *Initialisation :* Pour $n = 0$, $u_0 = 6 \geqslant 2$.

de plus : $u_1 = f(6) = \sqrt{3 \times 6 - 2} = \sqrt{16} = 4 \geqslant 2$.

Donc on a bien : $2 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 6$: l'inégalité est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Supposons que, pour un entier n naturel donné, l'inégalité est vraie, c'est-à-dire : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$.

Montrons que l'inégalité suivante est vraie, c'est-à-dire : $2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$.

Par hypothèse de récurrence : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$.

Comme f est croissante sur $[2\ ;\ +\infty[$: $f(2) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(6)$

D'après la relation de récurrence de (u_n) : $\sqrt{3 \times 2 - 2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \sqrt{3 \times 6 - 2}$.

En effectuant les calculs : $2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

Enfin, comme $4 \leqslant 6$, ce qui précède implique : $2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$.

Si l'inégalité est vraie pour un entier naturel n donné, alors on prouve qu'elle est aussi vraie pour l'indice suivant, $n + 1$.

Conclusion : L'inégalité est vraie pour l'indice $n = 0$, et pour tout n entier naturel, elle est héréditaire. Par application du principe de récurrence, on peut affirmer que, pour tout n entier naturel, on a : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$.

b. De la question précédente on tire :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n$: la suite (u_n) est décroissante;
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leqslant u_n$: la suite (u_n) est minorée par 2;

(u_n) est décroissante et minorée par 2, donc elle converge vers une limite ℓ qui vérifie : $2 \leqslant \ell$.

3. Soit x un réel supérieur à 2 :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \sqrt{3x-2} = x \\ &\iff 3x-2 = x^2 \quad \text{car } x \geqslant 2 \text{ donc } 3x-2 \geqslant 0 \\ &\iff x^2 - 3x + 2 = 0 \\ &\iff (x-1)(x-2) = 0 \end{aligned}$$

Le trinôme du second degré a donc deux racines 1 et 2.

Comme ℓ vérifie $\ell \geqslant 2$, seule la racine 2 peut être égale à ℓ.

On a donc $\ell = 2$.

4. **a.** La suite (u_n) converge vers 2, donc tout intervalle ouvert contenant 2 contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Un intervalle ouvert contenant 2 est de la forme $]b\,;\,a[$, avec $a > 2$, ou a qui est $+\infty$. Donc pour tout $a > 2$, il existe un rang N_0 à partir duquel $u_n < a$.

La boucle `while` se termine donc après N_0 itérations, et `rang`(2.000001) renvoie la valeur N_0.

Le seul risque que l'algorithme ne se termine pas avec un $a > 2$ serait que le réel a soit trop proche de 2, et que les algorithmes utilisés par python donnent une valeur approchée trop peu précise des différents termes u_n pour que la boucle se termine.

b. D'après ce que l'on a expliqué précédemment, l'instruction renvoie un résultat si et seulement si $a > \ell = 2$.

Donc pour $a > 2$.

Partie B

1. On a : $v_1 = 3 - \dfrac{2}{v_0} = 3 - \dfrac{2}{6} = 3 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{3}$.

2. **a.** Soit n un entier naturel quelconque. Déterminons la relation de récurrence de la suite (w_n).

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{v_{n+1}-1}{v_{n+1}-2} \\ &= \frac{3 - \dfrac{2}{v_n} - 1}{3 - \dfrac{2}{v_n} - 2} \\ &= \frac{2 - \dfrac{2}{v_n}}{1 - \dfrac{2}{v_n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{\dfrac{2v_n - 2}{v_n}}{\dfrac{v_n - 2}{v_n}} \\ &= \frac{2v_n - 2}{v_n - 2} \\ &= \frac{2(v_n-1)}{v_n - 2} \\ &= 2w_n \end{aligned}$$

Au vu de sa relation de récurrence, (w_n) est géométrique de raison 2.

Son premier terme est : $w_0 = \dfrac{v_0 - 1}{v_0 - 2} = \dfrac{6-1}{6-2} = \dfrac{5}{4} = 1,25$.

b. Puisque (w_n) est géométrique, de premier terme $w_0 = 1,25$ et de raison $q = 2$, par propriété, on en déduit que, pour tout entier n naturel, on a : $w_n = 1,25 \times 2^n$.

On admet la relation $w_n - 1 = \dfrac{1}{v_n - 2}$.

Avec un premier terme strictement positif et une raison strictement supérieure à 1, la suite (w_n) est strictement croissante, et donc elle est minorée par son premier terme : 1,25. Le nombre $w_n - 1$ sera donc toujours non nul.

Donc en inversant la relation admise, on a : $v_n - 2 = \dfrac{1}{w_n - 1} = \dfrac{1}{1,25 \times 2^n - 1}$.

Ce qui implique : $v_n = 2 + \dfrac{1}{1,25 \times 2^n - 1}$.

c. Comme $w_0 = 1,25 > 0$ et $q = 2 > 1$, par propriété : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,25 \times 2^n = +\infty$.

Par limite de la somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,25 \times 2^n - 1 = +\infty$.

Puis, par limite de l'inverse : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{1,25 \times 2^n - 1} = 0$.

Finalement, par limite de la somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2$.

3. Résolvons : $v_n < 2,01$:

$$\begin{aligned}
v_n < 2,01 &\iff 2 + \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1} < 2,01 \\
&\iff \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1} < 0,01 \\
&\iff 1 < 0,01(1,25 \times 2^n - 1) \quad \text{car, pour tout } n \text{ naturel, on a : } 1,25 \times 2^n - 1 > 0 \\
&\iff 1 < 0,0125 \times 2^n - 0,01 \\
&\iff 1,01 < 0,0125 \times 2^n \\
&\iff \frac{1,01}{0,0125} < 2^n \quad \text{car } 0,0125 > 0 \\
&\iff 80,8 < 2^n \\
&\iff \ln(80,8) < n \ln(2) \quad \text{car la fonction ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{*+} \\
&\iff \frac{\ln(80,8)}{\ln(2)} < n \quad \text{car } \ln(2) > 0 \\
&\iff n > \frac{\ln(80,8)}{\ln(2)}
\end{aligned}$$

$\dfrac{\ln(80,8)}{\ln(2)} \approx 6,34$. Le plus petit entier n vérifiant $v_n < 2,01$ est donc $n = 7$.

Partie C

Comme on a démontré dans la **partie A** que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 2, on explore les premiers termes de la suite à la calculatrice. On constate que $u_{16} \approx 2,012 \geqslant 2,01$, alors que $u_{17} \approx 2,009 < 2,01$.

On a donc, pour tout entier n supérieur ou égal à 17 : $1,99 < 2 < u_n \leqslant u_{17} < 2,01$

et donc, en particulier : $n \geqslant 17 \implies u_n \in]1,99\,;\,2,01[$.

D'après la **partie B**, on a pour tout n entier naturel :

$1,25 \times 2^n \geqslant 1,25$, donc $1,25 \times 2^n - 1 \geqslant 0,25 > 0$, on en déduit : $\dfrac{1}{1,25 \times 2^n - 1} > 0$.

Finalement, on a : $v_n = 2 + \dfrac{1}{1,25 \times 2^n - 1} > 2$.

D'après la dernière question de la **partie B**, on a : $n \geqslant 7 \implies v_n < 2,01$.

Ainsi, on a : $n \geqslant 7 \implies 1,99 < 2 < v_n < 2,01$.

Donc les termes de la suite (v_n) appartiennent à l'intervalle à partir de l'indice 7.

Pour que les deux conditions soient réunies, il faut donc que l'indice soit simultanément supérieur à 7 et à 17, donc, en conclusion, c'est à partir de l'indice $N = 17$ que les termes v_n et u_n sont dans l'intervalle $]1,99\ ;\ 2,01[$.

Exercice 4 — 4 points

1. **Affirmation 1 : Fausse.**

   Un code de validation tel que décrit sera assimilable à un quadruplet d'entiers : en effet, dans un code, l'ordre des chiffres est important, et donc on cherche bien un quadruplet, et non pas un ensemble de cardinal 4. On va noter $(c_1\ ;\ c_2\ ;\ c_3\ ;\ c_4)$ le quadruplet en question.

   On note : $C = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\ ;\ 7\ ;\ 8\ ;\ 9\}$ l'ensemble des 10 chiffres de 0 à 9.

   - c_1 sera choisi dans l'ensemble $C^* = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\ ;\ 7\ ;\ 8\ ;\ 9\}$, qui a un cardinal de 9, en effet, le premier chiffre doit être différent de 0, d'après l'énoncé ;
   - Les trois chiffres suivants forment un triplet d'entiers distincts choisis dans $C \setminus \{c_1\}$, qui a aussi comme cardinal 9 : c'est un arrangement de 3 éléments choisis parmi 9, il y a donc : $\dfrac{9!}{(9-3)!} = 504$ façons de choisir les trois chiffres suivants.
   - Par principe multiplicatif, il existe donc : $9 \times 504 = 4\,536$ codes différents.

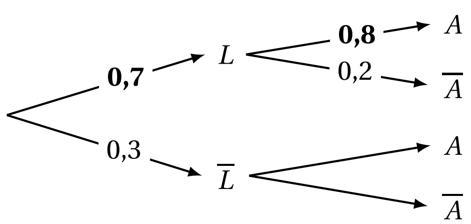
   Remarque : On peut aussi rédiger de la façon suivante :

   - Pour le premier chiffre, on a 9 choix possible (n'importe quel chiffre, sauf 0) ;
   - Pour le deuxième chiffre, on a 9 choix possibles (n'importe quel chiffre, sauf le premier) ;
   - Pour le troisième chiffre, on a 8 choix possibles (n'importe quel chiffre, sauf les deux premiers) ;
   - Et pour le quatrième chiffre, on a 7 choix possibles (n'importe quel chiffre, sauf les trois premiers) ;
   - Ainsi, par principe multiplicatif, il existe : $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4\,536$ codes différents.

2. **Affirmation 2 : Fausse.**

   Notons A l'évènement « la personne a choisi l'audioguide » et L l'évènement « la personne a acheté son billet en ligne ».

   Visualisons la situation décrite dans l'énoncé au moyen d'un arbre de probabilité. En gras, les probabilités données dans l'énoncé, en plus fin, celles qui s'en déduisent simplement. Les branches sans probabilités mériteront un calcul détaillé.



L'énoncé donne aussi $P\left(\overline{A}\right) = 0,32$.

La question porte sur $P_{\overline{L}}\left(\overline{A}\right)$. Par définition, on a : $P_{\overline{L}}\left(\overline{A}\right) = \dfrac{P\left(\overline{L} \cap \overline{A}\right)}{P\left(\overline{L}\right)}$.

L et $\overline{L}$ formant une partition de l'univers, d'après la loi des probabilités totales, on a :
$P\left(\overline{A}\right) = P\left(L \cap \overline{A}\right) + P\left(\overline{L} \cap \overline{A}\right)$.

D'après notre arbre : $P\left(L \cap \overline{A}\right) = P(L) \times P_{\overline{A}}(L) = 0,7 \times 0,2 = 0,14$.

On a donc : $P\left(\overline{A}\right) = P\left(L \cap \overline{A}\right) + P\left(\overline{L} \cap \overline{A}\right) \iff 0,32 = 0,14 + P\left(\overline{L} \cap \overline{A}\right)$.

$$\iff P\left(\overline{L} \cap \overline{A}\right) = 0,32 - 0,14$$

$$\iff P\left(\overline{L} \cap \overline{A}\right) = 0,18$$

On calcule finalement : $P_{\overline{L}}\left(\overline{A}\right) = \dfrac{P\left(\overline{L} \cap \overline{A}\right)}{P\left(\overline{L}\right)} = \dfrac{0,18}{0,3} = 0,6 < \dfrac{2}{3}$.

La probabilité qu'un visiteur ne prenne pas l'audioguide sachant qu'il a acheté son billet au guichet est de 0,6, qui est strictement inférieur à deux tiers.

3. **Affirmation 3 : Vraie.**

On a choisi nos 12 visiteurs au hasard. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de visiteurs n'ayant pas choisi l'audioguide.

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0,32$.

- En effet, chaque choix de visiteur du groupe de 12 est une expérience aléatoire à deux issues : le succès (le visiteur n'a pas choisi d'utiliser un audioguide) de probabilité $p = 0,32$ et l'échec;
- cette expérience est répétée $n = 12$ fois, de façon indépendante (d'après l'énoncé) et identique (les probabilités étant les mêmes) ;
- X compte le nombre de succès sur ces 12 répétitions.

L'événement « exactement la moitié des 12 visiteurs opte pour l'audioguide » est donc l'événement $\{X = 6\}$: la moitié (6 visiteurs) opte pour l'audioguide, et donc l'autre moitié (les 6 autres visiteurs) refusent l'audioguide.

Par propriété, on a : $P(X = 6) = \dbinom{12}{6} \times 0,32^6 \times (1 - 0,32)^6$.

Or : $\dbinom{12}{6} = \dfrac{12!}{6! \times 6!} = 924$

et : $0,32^6 \times (1 - 0,32)^6 = 0,32^6 \times 0,68^6 = (0,32 \times 0,68)^6 = 0,2176^6$.

On a donc bien : $P(X = 6) = \dbinom{12}{6} \times 0,32^6 \times (1 - 0,32)^6 = 924 \times 0,2176^6$.

4. **Affirmation 4 : Fausse.**

Dans cette question, X est donc la variable aléatoire qui donne la durée du parcours, exprimée en minutes.

On rappelle que 1 h 20 min correspondent à 80 minutes et 1 h 40 minutes à 100 minutes.

Par définition, on a :
$$\begin{aligned} E(X) &= P(X = 50) \times 50 + P(X = 80) \times 80 + P(X = 100) \times 100 \\ &= 0,1 \times 50 + 0,6 \times 80 + 0,3 \times 100 \\ &= 5 + 48 + 30 \\ &= 83 \end{aligned}$$

L'espérance de X est donc de 83 minutes, ce qui veut dire que la durée moyenne d'une visite avec l'audioguide est de 83 minutes, soit 1 h 23 min.