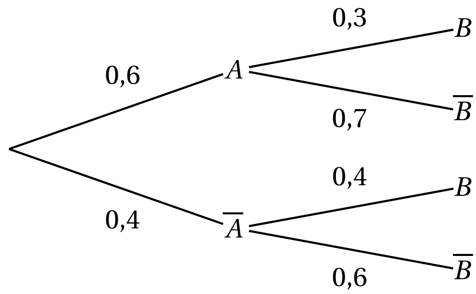
# ∽ Baccalauréat Métropole 18 juin 2025 ∾

## Sujet 2

## ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

**EXERCICE 1** **5 points**

**1.** Voici l'arbre des probabilités pondéré par les éléments de l'énoncé :




**2.** On sait que $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$.

La probabilité qu'une personne ne chute pas lors des deux premières séances est égale à 0,24.

**3.** $\left\{A\,;\,\overline{A}\right\}$ est un système complet d'évènements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)$, soit

$P(B) = 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,4 = 0,18 + 0,16 = 0,34$.

**4.** D'après la formule de la probabilité conditionnelle :

$$P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \frac{P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)} = \frac{P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)}{1 - P(B)} = \frac{0,24}{1 - 0,34} = \frac{0,24}{0,66} = \frac{24}{66} = \frac{4}{11} \text{ ou encore :}$$

$P_{\overline{B}}\left(\overline{A}\right) \approx 0,3636$, soit 0,364 au millième près.

**5.** **a.** On répète 100 fois de façon identique et indépendante l'expérience de Bernoulli dont la probabilité de succès (ne pas avoir chuté lors des deux premières séances) est égale à 0,24.

La variable aléatoire $X$ suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,24$.

**b.** On a $P(X \geqslant 20) = 1 - P(X < 20) = 1 - P(X \leqslant 19)$ soit d'après la calculatrice $\approx 1 - 0,145$, d'où

$P(X \geqslant 20) \approx 0,855$ au millième près.

**c.** On sait qu'alors $E(X) = n \times p = 100 \times 0,24 = 24$.

Ceci signifie qu'en moyenne sur 100 personnes, 24 ne chuteront lors des deux premières séances.

**Partie B**

**1.** Puisque $T = T_1 + T_2$, par linéarité de l'espérance :

$E(T) = E(T_1 + T_2) = E(T_1) + E(T_2) = 40 + 60 = 100$.

Il faut donc attendre en moyenne 100 minutes sur les deux jours.

Les variables aléatoires $T_1$ et $T_2$ étant indépendantes on a de même :

$V(T) = V(T_1 + T_2) = V(T_1) + V(T_2)$

Comme $V(T_1) = \sigma(T_1)^2 = 10^2 = 100$ et que $V(T_2) = \sigma(T_2)^2 = 16^2 = 256$, on a donc $V(T) = 100 + 256 = 356$.

**2.** Soit $60 < T < 140$ soit en centrant sur l'espérance :

$60 - 100 < T - 100 < 140 - 100 \iff -40 < T - 100 < 40 \iff |T - 100| < 40$ ou encore $|T - E(T)| < 40$.

D'après l'inégalité de Bienaimé-Tchebychev :

$P(|T - E(T)| \geqslant 40) \leqslant \dfrac{V(T)}{40^2} \iff P(|T - E(T)| \geqslant 40) \leqslant \dfrac{V(T)}{40^2} \iff$
$P(|T - E(T)| < 40) \geqslant 1 - \dfrac{356}{1\,600} \iff P(|T - E(T)| < 40) \geqslant \dfrac{1\,244}{1\,600}$.

Comme $\dfrac{1\,244}{1\,600} \approx 0{,}777\,5$ qui est supérieur à 0,77, on a finalement :

$$P(60 < T < 140) > 0,77.$$

## Exercice 2 — 5 points

### Partie A

**1.** Les droites sont sécantes s'il existe un point dont les coordonnées vérifient les équations paramétriques des deux droites, donc s'il existe deux réels $t$ et $s$ donnant les mêmes coordonnées avec les deux systèmes d'équations, soit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& \frac{3}{2} + 2t = s \\ y &=& 2 + t = \frac{3}{2} + s \\ z &=& 3 - t = 3 - 2s \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \frac{3}{2} + 2t &=& s \\ 2 + t &=& \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 2t \\ 3 - t &=& 3 - 2(\frac{3}{2} + 2t) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \frac{3}{2} + 2t &=& s \\ 2 + t &=& 3 + 2t \\ 3 - t &=& -4t \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} \frac{3}{2} + 2t &=& s \\ -1 &=& t \\ 3t &=& -3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} -\frac{1}{2} &=& s \\ -1 &=& t \\ t &=& -1 \end{array}\right.$$

Ces équations sont compatibles : les équations paramétriques de $d$ et de $(d')$ donnent respectivement avec $t = -1$ et $s = -\frac{1}{2}$ les mêmes coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ 4\right)$ du point commun à ces deux droites.

**2.** **a.** On a $\overrightarrow{\text{AB}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires : leurs premières coordonnées sont égales mais pas les autres

Or $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = 2 - 6 + 4 = 0$ et $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 2 - 2 + 0 = 0$.

Conclusion $\overrightarrow{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est un vecteur normal à ce plan.

**b.** Le résultat précédent montre que :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \iff 1x+2y+4z+d=0,\ d\in\mathbb{R}$.

En particulier $\text{C}(1\,;\,1\,;\,1) \in (\text{ABC}) \iff 1+2+4+d=0,\ d\in\mathbb{R} \iff d=-7$.

Finalement : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \iff x+2y+4z-7=0$.

**3.** A, B et C définissant un plan, il suffit de montrer que S n'appartient pas à ce plan :

$\text{S}\left(-\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,4\right) \notin (\text{ABC}) \iff -\dfrac{1}{2}+2+16-7 \neq 0 \iff \dfrac{21}{2} \neq 0$ qui est bien vraie.

**4.** **a.** Si H est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC), alors $\overrightarrow{\text{SH}}$ est un vecteur normal au plan (ABC), donc colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$.

Or $\overrightarrow{\text{SH}}\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

Avec $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, on a bien $\overrightarrow{n}=-2\overrightarrow{\text{SH}}$.

D'autre part on a ;

$\text{H}(-1\,;\,0\,;\,2) \in (\text{ABC}) \iff -1+2\times 0+4\times 2-7=0$ qui est vraie.

Conclusion : le point $\text{H}(-1\,;\,0\,;\,2)$ est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC).

**b.** De $\overrightarrow{\text{SH}}\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\\-1\\-2\end{pmatrix}$ on en déduit que $\text{SH}^2=\dfrac{1}{4}+1+4=\dfrac{1}{4}+\dfrac{20}{4}=\dfrac{21}{4}$, d'où $\text{SH}=\sqrt{\dfrac{21}{4}}=\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{4}}=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

Comme H est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC) on sait que la distance SH est la plus petite distance de S au plan. Pour tout autre point M distinct de H du plan (ABC), [SM] est l'hypoténuse du triangle rectangle SHM donc le côté le plus long de ce triangle et en particulier SM > SH, soit $\text{SM} > \dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

## Partie B

**1.** Si $M(x\,;\,y\,;\,z)$, avec $\overrightarrow{\text{CS}}\begin{pmatrix}-\dfrac{3}{2}\\0\\3\end{pmatrix}$, on a

$$\overrightarrow{\text{C}M}=k\overrightarrow{\text{CS}} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& -\dfrac{3}{2}k\\ y-1 &=& 0k\\ z-1 &=& 3k\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-\dfrac{3}{2}k\\ y &=& 1\\ z &=& 1+3k\end{array}\right.$$

**2.** $(M\text{AB})$ est rectangle en $M$ si :

$(\text{A}M)$ et $(\text{B}M)$ sont perpendiculaires soit si $\overrightarrow{\text{A}M}\cdot\overrightarrow{\text{B}M}=0$.

Avec $\overrightarrow{\text{A}M}\begin{pmatrix}1-\dfrac{3}{2}k+1\\1-2\\1+3k-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\text{A}M}\begin{pmatrix}2-\dfrac{3}{2}k\\-1\\3k\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{B}M}\begin{pmatrix}1-\dfrac{3}{2}k-1\\1+1\\1+3k-2\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{\text{B}M}\begin{pmatrix}-\dfrac{3}{2}k\\2\\3k-1\end{pmatrix}$ le produit scalaire s'écrit :

$-\dfrac{3}{2}k\left(2-\dfrac{3}{2}k\right)-2+3k(3k-1)=0 \iff -3k+\dfrac{9}{4}k^2-2+9k^2+\dfrac{9}{4}k^2-2+9k^2-3k=0 \iff$
$9k^2+36k^2-24k-8=0 \iff 45k^2-24k-8=0.$

Pour cette équation du second degré, on a

$\Delta=24^2-4\times 45\times(-8)=2016>0.$

L'équation a deux solutions :

$k_1=\dfrac{24+\sqrt{2016}}{90}\approx 0,765$ et $k_2=\dfrac{24-\sqrt{2016}}{90}\approx -0,232.$

Seul $k_1\in[0\,;\,1]$.

Conclusion : il existe un seul point $M_1$ du segment [CS] tel que $M_1$AB est un triangle rectangle en $M_1$.

*Rem.* Si on remplace $k$ par la valeur trouvée ci-dessus, on trouve que $\mathrm{AB}^2=14$, $\mathrm{A}M_1^2=7$ et $\mathrm{B}M_1^2=7$.

Le triangle $M_1$AB est un triangle rectangle $(7+7=14)$, mais aussi isocèle.

## EXERCICE 3 — 5 points

1. La suite $(u_n)$ est définie pour tout entier naturel $n$ par

$$u_n=\frac{1+5^n}{2+3^n}.$$

**Affirmation 1 :** La suite $(u_n)$ converge vers $\dfrac{5}{3}$. FAUSSE

En écrivant $u_n=\dfrac{1+5^n}{2+3^n}=\dfrac{\frac{1}{5^n}+1}{\frac{2}{5^n}+\left(\frac{3}{5}\right)^n}$ et en remarquant que :

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{5^n}=0$;
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{5^n}=0$;
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=0$ car $0<\dfrac{3}{5}<1$;

Donc par somme de limites, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{5^n}+1=1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{5^n}+\left(\frac{3}{5}\right)^n=0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

2. On considère la suite $(w_n)$ définie par :

$$w_0=0 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ w_{n+1}=3w_n-2n+3.$$

**Affirmation 2 :** Pour tout entier naturel $n$, $w_n\geqslant n$.

Raisonnement par récurrence :

*Initialisation* : $w_0=0\geqslant 0$ : l'inégalité est vraie au rang 0;

*Hérédité* : Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $w_n\geqslant n$, alors

$3w_n\geqslant 3n \iff 3w_n-2n\geqslant 3n-2n$ ou $3w_n-2n\geqslant n$ et enfin $3w_n-2n+3\geqslant n+3$.

Or $n+3=n+1+2$, donc $n+3>n+1$ et $3w_n-2n+3=w_{n+1}$.

On a donc $w_{n+1}\geqslant n+3>n+1$, soit par transitivité : $w_{n+1}\geqslant n+1$ : l'inégalité est vraie au rang $n+1$.

**Conclusion :** l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie à un rang $n$, elle l'est aussi au rang $n+1$ ; d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel $n$, $w_n \geqslant n$ : l'affirmation 2 est vraie.

**3.** L'affirmation est fausse car si $f$ était convexe sur $]0~;~+\infty[$, elle le serait au point d'abscisse 8 et sa courbe représentative serait au dessus de sa tangente au point A. C'est le contraire d'après le graphique : Affirmation 3 : fausse.

**4.** Soit $f$ la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - x + 1$.

Comme somme de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$, $f$ est dérivable sur cet =intervalle et $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$.

On a de façon immédiate :

• $f'(x) = 0 \iff x = 1$ ;

• $f'(x) > 0 \iff x < 1$, donc sur $]0; 1[$, $f$ est croissante de moins l'infini à $f(1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0$.

• $f'(x) < 0 \iff x > 1$, donc $f$ est décroissante sur $]1~;~+\infty[$ de 0 à moins l'infini.

Donc cette fonction est négative puisque son maximum est 0 en $x = 1$ : l'affirmation 4 est vraie.

## EXERCICE 4 — 5 points

### Partie A

**1.** Graphiquement on lit que $f(2) = 15$ : le chariot a parcouru 15 m en 2 secondes.

**2.** L'équation d $\Delta$ a une équation $y = k$, avec $k < 23$.

Une zone de 23 m de longueur semble suffisante.

**3.** La tangente en A contient les points de coordonnées $(0; 16,5)$ et $(4,7; 21)$. Son coefficient directeur est donc égal à : $\dfrac{21-16,5}{4,7-0} = \dfrac{4,5}{4,7} \approx 0,96$.

### Partie B

**1.** **a.** On considère l'équation différentielle

$$(E') : \quad y' + 0,6y = 0.$$

On sait que les solutions de cette équation (homogène) sont les fonctions définies sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$t \longmapsto f(t) = K\mathrm{e}^{-0,6t}, \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

**b.** Si $g$ la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par $g(t) = t\mathrm{e}^{-0,6t}$, alors
$g'(t) = \mathrm{e}^{-0,6t} - 0,6t\mathrm{e}^{-0,6t} = \mathrm{e}^{-0,6t}(1 - 0,6t)$.
Calculons $g'(t) + 0,6g(t) = \mathrm{e}^{-0,6t}(1-0,6t) + 0,6 \times t\mathrm{e}^{-0,6t} = \mathrm{e}^{-0,6t}(1-0,6t+0,6t) = \mathrm{e}^{-0,6t} \times 1 = \mathrm{e}^{-0,6t}$.
Comme $g'(t) + 0,6g(t) = \mathrm{e}^{-0,6t}$, $g$ est bien une solution particulière de l'équation $(E)$.

**c.** On sait qu'alors les solutions de l'équation $(E)$ sont les fonctions $f$ définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$t \longmapsto f(t) = t\mathrm{e}^{-0,6t} + K\mathrm{e}^{-0,6t} = \mathrm{e}^{-0,6t}(t+K), \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

**d.** En particulier la fonction $v$, est de cette forme :
$v(t) = \mathrm{e}^{-0,6t}(t+K)$ et vérifie $v(0) = 12$.
Or $v(0) = \mathrm{e}^{-0,6\times 0}(0+K) = 12 \iff 0+K = 12 \iff K = 12$.
Conclusion : $v(t) = (12+t)\mathrm{e}^{-0,6t}$.

**2.** **a.** Puisque $v$ est une solution de $(E)$, elle vérifie donc $v'(t) + 0,6v(t) = \mathrm{e}^{-0,6t} \iff$ $v'(t) = \mathrm{e}^{-0,6t} - 0,6v(t) \iff v'(t) = \mathrm{e}^{-0,6t} - 0,6(12+t)\mathrm{e}^{-0,6t} \iff$
$v'(t) = \mathrm{e}^{-0,6t}(1 - 7,2 - 0,6t) = \mathrm{e}^{-0,6t}(-6,2-0,6t)$.

**b.** Avec l'écriture $v(t) = 12\mathrm{e}^{-0,6t} + \dfrac{1}{0,6} \times \dfrac{0,6t}{\mathrm{e}^{0,6t}}$, on a :

- $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,6t} = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} 12\mathrm{e}^{-0,6t} = 0$ ;
- $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{0,6t}{\mathrm{e}^{0,6t}} = 0$ (puissances comparées au voisinage de plus l'infini) et ensuite $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{0,6}\frac{0,6t}{\mathrm{e}^{0,6t}} = 0$.

Finalement par somme de limites : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} v(t) = 0$ (ce qui est rassurant : le chariot va s'arrêter).

**c.** Puisque $v'(t) = \mathrm{e}^{-0,6t}(-6,2-0,6t)$ et comme $\mathrm{e}^{-0,6t} > 0$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$, le signe de $v'(t)$ est celui de $(-6,2-0,6t)$.

- $-6,2-0,6t > 0 \iff -6,2 > 0,6t \iff -62 > 6t \iff -\dfrac{62}{6} > t \iff t < \dfrac{62}{6}$ soit enfin $t < \dfrac{31}{3}$ ; $v$ est donc croissante sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{31}{3}\right[$ ; dans le cadre de l'exercice puisque $t \geqslant 0$ ceci ne peut arriver, donc
- $-6,2-0,6t < 0 \iff t > -\dfrac{62}{6}$, soit en fait pour $t \geqslant 0$, donc $v$ est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$ de 12 à 0.

**d.** D'où le tableau de variation suivant :

| $x$ | 0 | | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $v'(t)$ | | $-$ | | |
| $v$ | 12 | | 1 | 0 |

Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la fonction $v$ continue, car dérivable est strictement décroissante de 12 à 0 ; comme $1 \in ]0\,;\,12]$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel unique $\alpha \in ]0\,;\,+\infty[$ tel que $v(\alpha) = 1$.
La calculatrice montre que :
$v(4) \approx 1,5$ et $v(5) \approx 0,85$, donc $4 < \alpha < 5$ ;
$v(4,6) \approx 1,05$ et $v(4,7) \approx 0,995$, donc $4,6 < \alpha < 4,7$ ; à 0,1 près on prend $\alpha \approx 4,7$.

**3.** D'après la question précédente la vitesse descend à 1 m/s au bout de 4,7 s. Le système d'arrêt se déclenchera donc au bout de 4,7 s.

**Partie C**

**1.** Calcul de l'intégrale : $d(t) = \displaystyle\int_0^t (12+x)\mathrm{e}^{-0,6x}\,\mathrm{d}x$ :

Avec
$$\left\{\begin{array}{ll} u(x) = 12+x & v'(x) = \mathrm{e}^{-0,6x} \\ u'(x) = 1 & v(x) = -\dfrac{1}{0,6}\mathrm{e}^{-0,6x} \end{array}\right.,$$
et toutes ces fonctions étant continues car dérivables sur $[0\,;\,t]$, on peut intégrer par parties :

**Rappel :** $\boxed{\displaystyle\int_0^t u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_0^t - \int_0^t u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x}$.

Donc $d(t) = \left[-(12+x)\times\dfrac{1}{0,6}\mathrm{e}^{-0,6x}\right]_0^t - \displaystyle\int_0^t -\dfrac{1}{0,6}\mathrm{e}^{-0,6x}\,\mathrm{d}x$.

Soit $d(t) = \left[-(12+x)\times\dfrac{1}{0,6}\mathrm{e}^{-0,6x}\right]_0^t + \displaystyle\int_0^t \dfrac{1}{0,6}\mathrm{e}^{-0,6x}\,\mathrm{d}x =$

$\left[-(12+x)\times\dfrac{1}{0,6}\mathrm{e}^{-0,6x}\right]_0^t - \dfrac{1}{0,6}\left[\dfrac{1}{0,6}\mathrm{e}^{-0,6x}\right]_0^t = \left[-(12+x)\times\dfrac{1}{0,6}\mathrm{e}^{-0,6x} - \dfrac{1}{0,36}\mathrm{e}^{-0,6x}\right]_0^t$.

Or $\dfrac{1}{0,6} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$ et $\dfrac{1}{0,36} = \dfrac{100}{36} = \dfrac{4\times 25}{4\times 9} = \dfrac{25}{9}$.

Soit $d(t) = \left[-(12+x)\times\dfrac{5}{3}\mathrm{e}^{-0,6x}\right]_0^t - \left[\dfrac{25}{9}\mathrm{e}^{-0,6x}\right]_0^t = \left[-\mathrm{e}^{-0,6x}\left(\dfrac{5(12+x)}{3} + \dfrac{25}{9}\right)\right]_0^t =$

$-\mathrm{e}^{-0,6t}\left(20 + \dfrac{5t}{3} + \dfrac{25}{9}\right) + 20 + \dfrac{25}{9} = \mathrm{e}^{-0,6t}\left(-\dfrac{5}{3}t - \dfrac{205}{9}\right) + \dfrac{205}{9}$.

**2.** On a vu que la vitesse du chariot est à peu près égale à 1 m/s au bout de 4,7 s.

La distance parcourue par le chariot au moment du déclenchement de l'arrêt est donc $d(4,7) = \mathrm{e}^{-0,6\times 4,7}\left(-\dfrac{5}{3}\times 4,7 - \dfrac{205}{9}\right) + \dfrac{205}{9} \approx 20,95$ (m) au centimètre près.

Le dispositif s'arrêt se déclenche quand le chariot a parcouru environ 20,95 m.