∽ Baccalauréat Centres étrangers 12 juin 2025 ∾

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1 — 6 points

Cet exercice est constitué de trois parties indépendantes

Un magasin est équipé de caisses automatiques en libre-service où le client scanne lui-même ses articles. Le logiciel d'une caisse déclenche régulièrement des demandes de vérification. Un employé du magasin effectue alors un contrôle.

Partie A

Le contrôle peut être

- soit « total » : l'employé du magasin scanne alors à nouveau l'ensemble des articles du client;
- soit « partiel » : l'employé choisit alors un ou plusieurs articles du client pour vérifier qu'ils ont bien été scannés.

Si un contrôle est déclenché, il s'agit une fois sur dix d'un contrôle total.
Lorsqu'un contrôle total est déclenché, une erreur du client est détectée dans 30 % des cas.
Lorsqu'un contrôle partiel est effectué, dans 85 % des cas, il n'y a pas d'erreur.

Un contrôle est déclenché à une caisse automatique.
On considère les évènements suivants :

- T : « Le contrôle est un contrôle total »;
- E : « Une erreur est détectée lors du contrôle ».

On notera $\overline{T}$ et $\overline{E}$ les évènements contraires de T et E.

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation puis déterminer $P\left(\overline{T} \cap E\right)$.
2. Calculer la probabilité qu'une erreur soit détectée lors d'un contrôle.
3. Déterminer la probabilité qu'un contrôle total ait été effectué, sachant qu'une erreur a été détectée. *On donnera la valeur arrondie au centième.*

Partie B

Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est $p = 0,165$. La détection d'une erreur lors d'un contrôle est indépendante des autres contrôles.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'exactement 5 erreurs soient détectées. *On donnera la valeur arrondie au centième.*

3. Déterminer la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée. *On donnera la valeur arrondie au centième.*

4. On souhaite modifier le nombre de contrôles déclenchés par la caisse de manière à ce que la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée chaque jour soit supérieure à 99 %.

Déterminer le nombre de contrôles que doit déclencher la caisse chaque jour pour que cette contrainte soit respectée.

Partie C

Le magasin comporte trois caisses automatiques identiques qui, lors d'une journée, ont chacune déclenché 20 contrôles. On note X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires associant à chacune des caisses le nombre d'erreurs détectées lors de cette journée.
On admet que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes entre elles et suivent chacune une loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;\,0,165)$.

1. Déterminer les valeurs exactes de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire X_1.

2. On définit la variable aléatoire S par $S = X_1 + X_2 + X_3$.

Justifier que $E(S) = 9,9$ et que $V(S) = 8,2665$.

Pour cette question, on utilisera 10 comme valeur de $E(S)$.

À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la probabilité que le nombre total d'erreurs sur la journée soit strictement compris entre 6 et 14 est supérieure à 0,48.

Exercice 2 — QCM **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Les quatre questions sont indépendantes.
Pour chaque question, une seule réponse correcte. Aucune justification n'est demandée.
Dans tout l'exercice, on considère que l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
On considère :

- les points A$(-3\,;\,1\,;\,4)$ et B$(1\,;\,5\,;\,2)$
- le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $4x + 4y - 2z + 3 = 0$
- la droite (d) dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -6+3t \\ y &=& 1 \\ z &=& 9-5t \end{array}\right.$, où $t \in \mathbb{R}$.

1. Les droites (AB) et (d) sont :

- **a.** sécantes non perpendiculaires.
- **b.** perpendiculaires.
- **c.** non coplanaires.
- **d.** parallèles.

2. La droite (AB) est :

- **a.** incluse dans le plan $\mathscr{P}$.
- **b.** strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$.
- **c.** sécante et non orthogonale au plan $\mathscr{P}$.
- **d.** orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

3. On considère le plan P' d'équation cartésienne $2x + y + 6z + 5 = 0$.
Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont :

- **a.** sécants et non perpendiculaires.
- **b.** perpendiculaires.
- **c.** confondus.
- **d.** strictement parallèles.

4. On considère le point C$(0\ ;\ 1\ ;\ -1)$. La valeur de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ arrondie au degré est :

- **a.** 90°
- **b.** 51°
- **c.** 39°
- **d.** 0°

Exercice 3 — 6 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 4\ln(x+1) - \frac{x^2}{25}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en -1.

2. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}$$

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2\ ;\ 6{,}5]$.

4. On considère h la fonction définie sur l'intervalle $[2\,;6{,}5]$ par $h(x) = f(x) - x$.

   On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction h :

x	2	$m \approx 2,364$	$6,5$
$h(x)$	$h(2)$	$\nearrow$ $M \approx 2,265$ $\searrow$	$h(6,5)$

   Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [2\,;\,6,5]$.

5. On considère le script suivant, écrit en langage Python :

```
from math import *

def f(x) :
    return 4*log(1+x)-(x**2)/25

def bornes(n) :
    p = 1/10**n
    x = 6
    while f(x)-x > 0 :
        x = x + p
    return (x-p, x)
```

   On rappelle qu'en langage Python :

   - la commande log(x) renvoie la valeur $\ln x$;
   - la commande c$**$d renvoie la valeur de c^{d}.

   a. Donner les valeurs renvoyées par la commande bornes(2).
   On donnera les valeurs arrondies au centième.

   b. Interpréter ces valeurs dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser les résultats obtenus dans la partie A.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel,

$$2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 6,5.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ.

3. On rappelle que le réel α, défini dans la partie A, est la solution de l'équation $h(x) = 0$ sur l'intervalle $[2\,;6{,}5]$.

   Justifier que $\ell = \alpha$.

Exercice 4 — 4 points

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E_1): \quad y' + 0{,}48y = \frac{1}{250},$$

où y est une fonction de la variable t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

1. On considère la fonction constante h définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $h(t) = \dfrac{1}{120}$.
   Montrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1).
2. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' + 0,48y = 0$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1).

Partie B

On s'intéresse à présent à l'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture.
À un instant $t = 0$, on introduit une population initiale de 30 000 bactéries dans le milieu.
On note $p(t)$ la quantité de bactéries, exprimée en millier d'individus, présente dans le milieu après un temps t, exprimé en heure.
On a donc $p(0) = 30$.
On admet que la fonction p définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ est dérivable, strictement positive sur cet intervalle et qu'elle est solution de l'équation différentielle (E_2) :

$$p' = \frac{1}{250}p \times (120 - p)$$

Soit y la fonction strictement positive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ telle que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a $p(t) = \dfrac{1}{y(t)}$.

1. Montrer que si p est solution de l'équation différentielle (E_2), alors y est solution de l'équation différentielle (E_1) : $\quad y' + 0,48y = \dfrac{1}{250}$.
2. On admet réciproquement que, si y est une solution strictement positive de l'équation différentielle (E_1), alors $p = \dfrac{1}{y}$ est solution de l'équation différentielle (E_2).
   Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a :
   $$p(t) = \frac{120}{1 + K\mathrm{e}^{-0{,}48t}} \text{ avec } K \text{ une constante réelle.}$$
3. En utilisant la condition initiale, déterminer la valeur de K.
4. Déterminer $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} p(t)$. En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60 000 individus.
   On donnera le résultat sous la forme d'une valeur arrondie exprimée en heures et minutes.