

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1

6 points

A. P. M. E. P.

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B.

Au 1<sup>er</sup> janvier 2025, on introduit 6 000 individus dans chacun des milieux A et B.

Partie A

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu A.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique  $(u_n)$  de premier terme  $u_0 = 6$  et de raison 0,93.

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  représente la population au 1<sup>er</sup> janvier de l'année 2025 +  $n$ , exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1<sup>er</sup> janvier 2026.
2. Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
3. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu B.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par la suite  $(v_n)$  définie par

$$v_0 = 6 \text{ et pour tout entier naturel } n, v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n.$$

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n$  représente la population au 1<sup>er</sup> janvier de l'année 2025 +  $n$ , exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1<sup>er</sup> janvier 2026.

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = -0,05x^2 + 1,1x.$$

2. Démontrer que la fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[0 ; 11]$ .
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6.$$

4. En déduire que la suite  $(v_n)$  est convergente vers une limite  $\ell$ .
5.
  - a. Justifier que la limite  $\ell$  vérifie  $f(\ell) = \ell$  puis en déduire la valeur de  $\ell$ .
  - b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Cette partie a pour but de comparer l'évolution de la population dans les deux milieux.

1. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3 000 individus.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu B sera strictement inférieure à 3 000 individus.
3. Justifier qu'à partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera la population du milieu A.
4. On considère le programme Python ci-contre.

```

n=0
u = 6
v = 6
while ... :
    u = ...
    v = ...
    n = n+1
print (2025 + n)

```

- a. Recopier et compléter ce programme afin qu'après exécution, il affiche l'année à partir de laquelle la population du milieu B est strictement supérieure à la population du milieu A.
- b. Déterminer l'année affichée après exécution du programme.

## Exercice 2

6 points

### Partie A

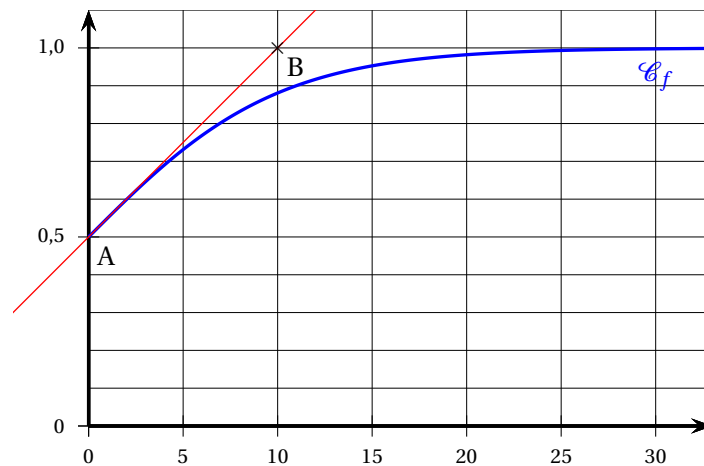
On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{1}{a + e^{-bx}}$$

où  $a$  et  $b$  sont deux constantes réelles strictement positives.

On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

La fonction  $f$  admet pour représentation graphique la courbe  $\mathcal{C}_f$  ci-dessous :



On considère les points  $A(0; 0,5)$  et  $B(10; 1)$ .

On admet que la droite (AB) est tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point A.

1. Par lecture graphique, donner une valeur approchée de  $f(10)$ .
2. On admet que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ .

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

3. Justifier que  $a = 1$ .
4. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
5.
  - a. Déterminer l'expression de  $f'(x)$  en fonction de  $x$  et de la constante  $b$ .
  - b. En déduire la valeur de  $b$ .

**Partie B**

On admet, dans la suite de l'exercice, que la fonction  $f$  est définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par :

$$f(t) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}}$$

1. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
2. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .
3. Montrer qu'il existe un unique réel  $\alpha$  positif tel que  $f(\alpha) = 0,97$ .
4. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement du réel  $\alpha$  par deux nombres entiers consécutifs.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

**Partie C**

1. Montrer que, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ ,  $f(x) = \frac{e^{0,2x}}{1 + e^{0,2x}}$ .
2. En déduire une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .
3. Calculer la valeur moyenne de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; 40]$ , c'est-à-dire :

$$I = \frac{1}{40} \int_0^{40} \frac{1}{1 + e^{-0,2x}} dx.$$

On donnera la valeur exacte et une valeur approchée au millième.

**Exercice 3****4 points**

Le codage « base64 », utilisé en informatique, permet de représenter et de transmettre des messages et d'autres données telles que des images, en utilisant 64 caractères : les 26 lettres majuscules, les 26 lettres minuscules, les chiffres de 0 à 9 et deux autres caractères spéciaux.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

**Partie A**

Dans cette partie, on s'intéresse aux séquences de 4 caractères en base64. Par exemple, « gP3g » est une telle séquence. Dans une séquence, l'ordre est à prendre en compte : les séquences « m5C2 » et « 5C2m » ne sont pas identiques.

1. Déterminer le nombre de séquences possibles.
2. Déterminer le nombre de séquences si l'on impose que les 4 caractères sont différents deux à deux.
3.
  - a. Déterminer le nombre de séquences ne comportant pas de lettre A majuscule
  - b. En déduire le nombre de séquences comportant au moins une lettre A majuscule.
  - c. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement une fois la lettre A majuscule.
  - d. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement deux fois la lettre A majuscule.

### Partie B

On s'intéresse à la transmission d'une séquence de 250 caractères d'un ordinateur à un autre. On suppose que la probabilité qu'un caractère soit mal transmis est égale à 0,01 et que les transmissions des différents caractères sont indépendantes entre elles. On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de caractères mal transmis.

1. On admet que la variable aléatoire  $X$  suit la loi binomiale. Donner ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que tous les caractères soient bien transmis. *On donnera l'expression exacte, puis une valeur approchée à  $10^{-3}$  près.*
3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante : « La probabilité que plus de 16 caractères soient mal transmis est négligeable » ?

### Partie C

On s'intéresse maintenant à la transmission de 4 séquences de 250 caractères.

On note  $X_1, X_2, X_3$  et  $X_4$  les variables aléatoires correspondant aux nombres de caractères mal transmis lors de la transmission de chacune des 4 séquences.

On admet que les variables aléatoires  $X_1, X_2, X_3$  et  $X_4$  sont indépendantes entre elles et suivent la même loi que la variable aléatoire  $X$  définie en partie B.

On note  $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ .

Déterminer, en justifiant, l'espérance et la variance de la variable aléatoire  $S$ .

### Exercice 4

4 points

On se place dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace.

On considère les points  $A(1; 0; 3)$ ,  $B(-2; 1; 2)$  et  $C(0; 3; 2)$ .

1.
  - a. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
  - b. Soit  $\vec{n}$  le vecteur de coordonnées  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Vérifier que le vecteur  $\vec{n}$  est orthogonal au plan (ABC).

- c. En déduire que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne  
 $-x + y + 4z - 11 = 0$ .

On considère le plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne  $3x - 3y + 2z - 9 = 0$  et le plan  $\mathcal{P}'$  d'équation cartésienne  $x - y - z + 2 = 0$ .

2. a. Démontrer que les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont sécants. On note  $(d)$  leur droite d'intersection.  
b. Déterminer si les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont perpendiculaires.
3. Montrer que la droite  $(d)$  est dirigée par le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .
4. Montrer que le point  $M(2; 1; 3)$  appartient aux plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$ . En déduire une représentation paramétrique de la droite  $(d)$ .
5. Montrer que la droite  $(d)$  est aussi incluse dans le plan (ABC).  
Que peut-on dire des trois plans (ABC),  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$ ?