❄ Chapitre 11 ❄

Application de la dérivée

I. Sens de variation et dérivée

Propriété 1 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) \geqslant 0$.
- Si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) \leqslant 0$.
- Si f est constante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$.

Propriété 2 :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x) = 0$ sur I, alors f est constante sur I.
- Si $f'(x) > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f'(x) < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

Méthode 1 :

Pour déterminer le sens de variation d'une fonction avec les propriétés ci-dessus , il faut :

1. dériver la fonction dont on veut déterminer les variations
2. étudier le signe de la fonction dérivée
3. dresser le tableau de signe de la fonction dérivée et en déduire le tableau de variations de la fonction.

Exemple 1:

On considère la fonction f définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2-x-8}{x+2}$.

1. On dérive la fonction f : $f(x) = \dfrac{2x^2-x-8}{x+2} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 2x^2-x-8$ et $v(x) = x+2$.
   On a donc $u'(x) = 4x-1$ et $v'(x) = 1$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)\times v(x) - u(x)\times v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(4x-1)\times(x+2)-(2x^2-x-8)\times 1}{(x+2)^2} \\
&= \frac{4x^2+8x-x-2-2x^2+x+8}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+8x+6}{(x+2)^2} = \frac{2(x^2+4x+3)}{(x+2)^2}
\end{aligned}
$$

2. Signe de $f'(x)$:
   • Étude du signe du numérateur :

$$
\begin{aligned}
x^2+4x+3 &= 0 \\
\Delta &= b^2-4ac \\
&= 4^2-4\times1\times3 \\
&= 4 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

$$
x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}
$$

$$
x_1 = \frac{-4-\sqrt{4}}{2\times1} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4+\sqrt{4}}{2\times1}
$$

$$
x_1 = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = -1
$$

   • Étude du signe du dénominateur : $(x+2)^2 \geqslant 0$.

3. Tableau de signe de f' et tableau de variation de f :

x	-2		-1		$+\infty$
2		$+$		$+$	
x^2+4x+3		$-$	0	$+$	
$(x+2)^2$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	-5	↗	$+\infty$

II. Extremum

Définition 1:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et x_0 un nombre réel appartenant à I.

- La fonction f admet un **maximum** sur I, atteint en x_0 signifie que : pour tout réel x de I, $f(x) \leqslant f(x_0)$. $M = f(x_0)$ est le **maximum** de f sur I.
- La fonction f admet un **minimum** sur I, atteint en x_0 signifie que : pour tout réel x de I, $f(x) \geqslant f(x_0)$. $m = f(x_0)$ est le **minimum** de f sur I.
- Dire que $f(x_0)$ est un **extremum** de f signifie que $f(x_0)$ est un maximum ou un minimum.

Propriété 3 :

Soit f une fonction défini sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si la fonction f admet un extremum local en $x_0 \in I$ alors il existe un réel $x_0 \in I$ tel que $f'(x_0) = 0$

Exemple 2:

On reprend l'exemple du **??**.
La fonction f admet un extremum en $x = -1$ qui vaut -5 donc f' s'annule en $x_0 = -1$.
En observant le tableau de variations, on peut aussi dire que cet extremum est le minimum de la fonction f.

Remarque :

la fonction f admet un extremum local en $x_0 \in I$ si et seulement si il existe un réel $x_0 \in I$ tel que $f'(x_0) = 0$ **et** que la fonction f' change de signe en x_0.