❉ Chapitre 19 ❉

# Application du produit scalaire

## I. Produit scalaire avec les normes

**Propriété 1 :**

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

- $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$ soit $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2$.
- $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$ soit $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2$.
- $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$ soit $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2$.

**Propriété 2 :**

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right) \quad \text{et} \quad \vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2\right)$$

**Démonstration :**

Ces deux égalités sont une conséquence direct de la propriété précédente.

## II. Relation métrique dans un triangle

### 1. Formules d'Al-Kaschi

**Propriété 3 :** *Formule d'Al-Kaschi*

On considère un triangle $ABC$ quelconque de côtés $AB = c$, $BC = a$ et $CA = b$ avec l'angle $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \widehat{A}$. On a la relation suivante :

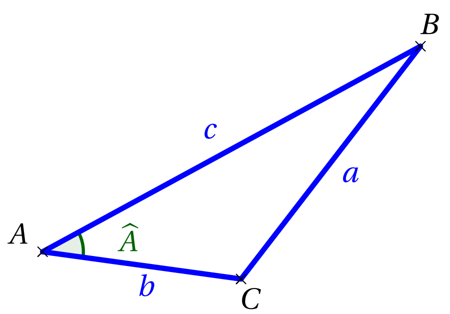
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

**Démonstration :**

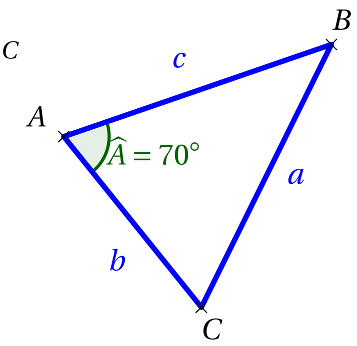
$a^2 = BC^2 = ||\overrightarrow{BC}||^2$

Par la relation du Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned}
a^2 &= ||\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}||^2 \\
&= (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}) \\
&= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} \\
&= ||\overrightarrow{BA}||^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + ||\overrightarrow{AC}||^2 \\
&= ||\overrightarrow{BA}||^2 + 2||\overrightarrow{BA}||\,||\overrightarrow{AC}||\cos(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{AC}) + ||\overrightarrow{AC}||^2 \\
a^2 &= c^2 - 2cb\cos(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) + b^2
\end{aligned}$$



**Exemple 1:**
On considère le triangle $ABC$ de mesures $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm et $\widehat{A} = 70°$. Calculer $BC$




$$\begin{aligned} BC^2 &= AC^2 + AB^2 - 2 \times AC \times AB \times \cos \widehat{A} \\ &= 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos(70^\circ) \\ &= 16,79 \end{aligned}$$

Donc $BC = 4,1$ cm

# III. Étude d'un ensemble de points

## 1. Transformation d'une expression

**Propriété 4 :**
Soient deux points $A$ et $B$ et $I$ le milieu de $[AB]$.
Alors, pour tout point $M$ du plan : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$.

**Démonstration :**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right) && \text{car } \overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA} \\ &= MI^2 - IA^2 \\ &= MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 && \text{car } IA = \frac{AB}{2} \end{aligned}$$

■

**Exemple 2:**
Soient deux points $A$ et $B$ tels que $AB = 8$.
Déterminons l'ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2$.

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2 \iff MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 2 \iff MI^2 = 2 + \frac{8^2}{4} \iff MI^2 = 18$$

Donc l'ensemble des points $M$ est le cercle de centre le milieu de $[AB]$ et de rayon $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

## 2. Cercle

**Propriété 5 :**
Soient deux points $A$ et $B$.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

**Démonstration :**
Soient deux points $A$ et $B$ et $I$ le milieu de $[AB]$.

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff MI^2 - IA^2 = 0 \iff MI = IA$$

$M$ appartient donc au cercle de centre $I$ et de rayon $IA$, c'est-à-dire le cercle de diamètre $[AB]$. ■

## 3. Cercle et triangle rectangle

**Propriété 6 :**
Un point $M$, distinct de $A$ et $B$, appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si le triangle $ABM$ est rectangle en $M$.