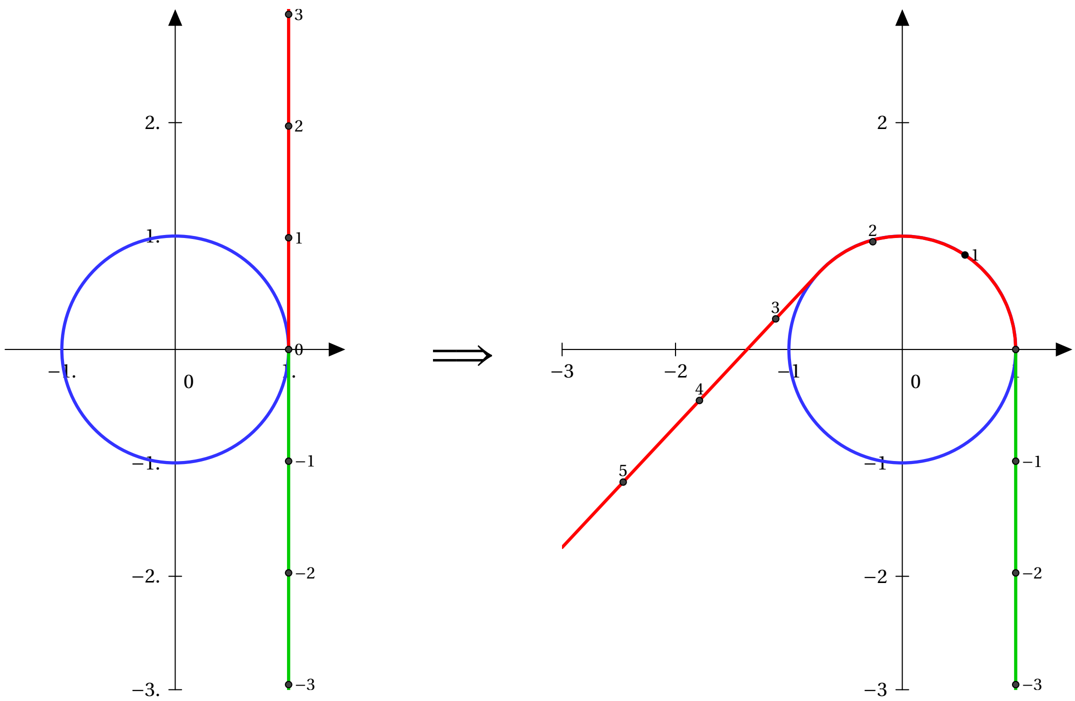
❉ Chapitre 4 ❉
Cercle trigonométrique et radian

I. Le radian

1. Enroulement d'une droite sur le cercle trigonométrique

Pour aller se promener, il est peu pratique d'emmener la droite des réels telle quelle (elle prend trop de place). C'est pourquoi on va l'enrouler autour d'un cercle : on considère le cercle de centre 0 de rayon 1, on « colle » l'origine de la droite des réels sur le point de coordonnées $(1;0)$ et on enroule :



Remarque :

1. A chaque point de la droite des réels correspond un unique point sur le cercle, mais inversement, à tout point du cercle correspond une infinité de points sur la droite, tous distincts de $k \times 2\pi$ où k est un nombre de tours.
2. Le périmètre du cercle unité vaut $2\pi R = 2\pi$.
   Donc, le point d'abscisse 2π de la droite des réels vient se « coller » sur le 0 d'origine du cercle.
   On peut donc définir une nouvelle unité de mesure : le radian.

2. Le radian

Définition 1:

Le **radian** est, comme le degré ou le grade, une unité de mesure d'angles définie de la façon suivante :
Si A et M sont deux points d'un cercle de centre O de rayon r, l désigne la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AM}$
La mesure en radians de l'angle $\widehat{AOM}$ est le réel $\alpha = \dfrac{l}{r}$

Remarque :

- Le cas particulier $r = 1$ est intéressant car alors $l = \alpha$. Dans ce cas, la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOM}$ est égale à la longueur de l'arc géométrique $\widehat{AM}$
- Il y a proportionnalité entre la mesure en degrés et la mesure en radians :
  360 degrés = 2π radians ou encore 180 degrés = π radians

Mesure en degrés	360	180	90	60	45	30
Mesure en radians	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

3. Le cercle trigonométrique

Définition 2:

- Un **cercle orienté** est un cercle sur lequel on distingue les deux sens de parcours : le sens direct ou indirect,
- Le **cercle trigonométrique** est le cercle de rayon 1 orienté de telle sorte que le sens direct est celui du sens inverse des aiguilles d'une montre.

Remarque :

- Sens direct : sens positif, sens trigonométrique, sens inverse des aiguilles d'une montre.
- Sens indirect : sens négatif, sens horaire .

II. Angles orientés

1. Mesure d'un arc ou d'angle orienté de vecteurs

$(\mathscr{C})$ est le cercle trigonométrique de centre O, A et M sont deux points de $(\mathscr{C})$

Définition 3:

Une mesure, en radians, de l'arc orienté $\widehat{AM}$ ou de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ est la longueur de chemin parcouru pour aller de A à M dans le sens direct

Propriété 1 :

Si α est une mesure en radians de l'arc orienté $\widehat{AM}$ ou de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$, alors toutes les mesures en radians de cet arc sont de la forme $\alpha + 2k\pi$ où k est un nombre entier relatif

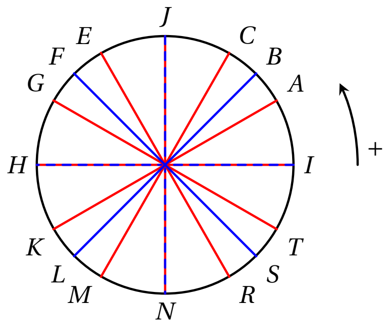
Remarque :

Le "k" détermine en fait un nombre de tours que l'on effectue sans le sens direct si k est positif, et dans le sens indirect si k est négatif

Exemple 1:

Plaçons sur le cercle trigonométrique les quatre points U, V, W, X tels que :

- $\frac{5\pi}{3} - 2\pi$ est une mesure de $(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OL})$
- $\frac{7\pi}{6} - 3\pi$ est une mesure de $(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OM})$
- $\frac{7\pi}{6} + 2\pi - \frac{\pi}{3}$ est une mesure de $(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{ON})$

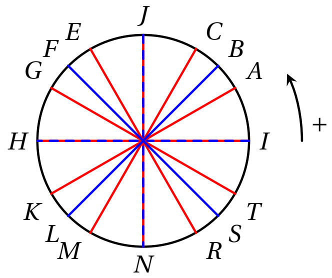


2. Mesure principale

Définition 4:
On appelle **mesure principale**, en radians, son unique mesure appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$

Exemple 2:

Donner les mesures principales des angles suivants en les plaçant sur le cercle trigonométrique :

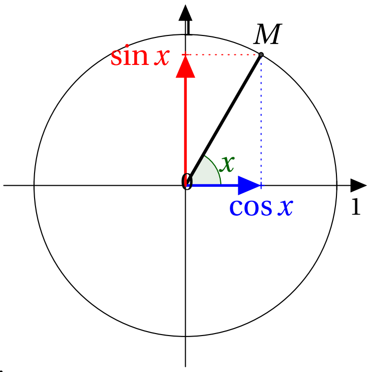


- $\alpha_1 = \dfrac{21\pi}{2}$
- $\alpha_2 = \dfrac{14\pi}{3}$
- $\alpha_3 = \dfrac{-13\pi}{4}$

III. Fonctions sinus et cosinus

Définition 5:
Soit x un réel quelconque. Il lui correspond un unique point M du cercle trigonométrique tel que x soit une mesure en radians de $(\widehat{AOM})$.

- Le **cosinus** de x, noté $\cos x$, est l'abscisse de M dans le repère $(O;I;J)$.
- Le **sinus** de x, noté $\sin x$, est l'ordonnée de M dans le repère $(O;I;J)$.



$\cos x$ est l'abscisse du point M dans le repère $(O;I;J)$.

$\sin x$ est l'ordonnée du point M dans le repère $(O;I;J)$.

On note :

$$M(\cos x;\sin x)$$

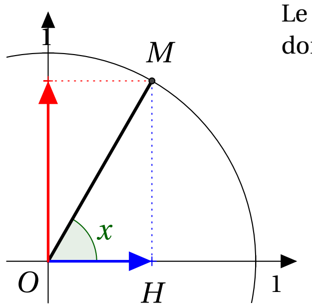
D'après le cercle trigonométrique, on peut « lire » les propriétés suivantes :

Propriété 2 :

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$
- $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

Démonstration :

- Propriété à démontrer : « $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ »

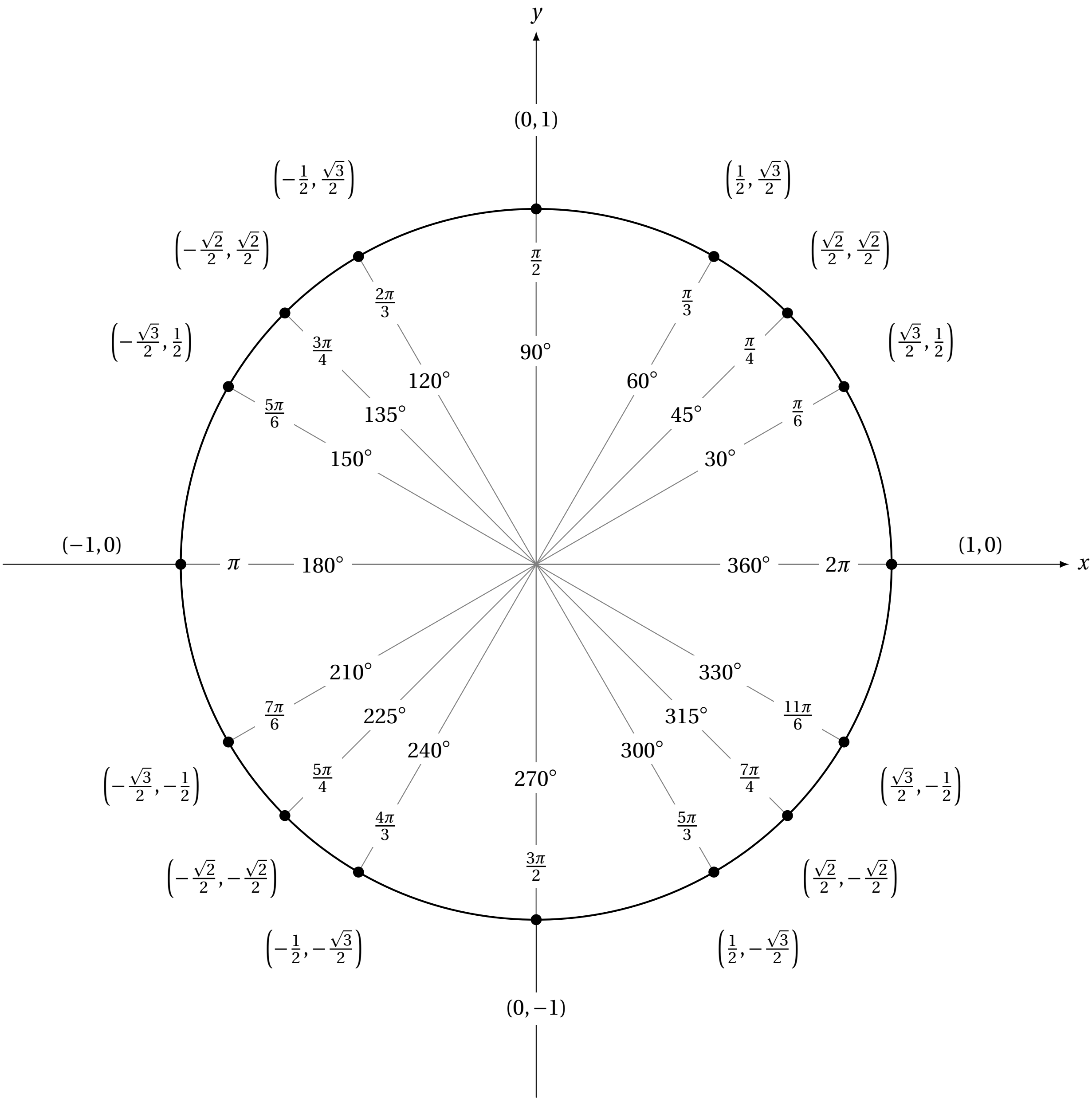


Le repère étant orthonormé, le triangle OMH est donc rectangle en H. On peut donc appliquer le théorème de Pythagore dans ce triangle.

$$\begin{aligned}
OH^2 + HM^2 &= OM^2 \\
\frac{OH^2}{OM^2} + \frac{HM^2}{OM^2} &= 1 \\
\left(\frac{OH}{OM}\right)^2 + \left(\frac{HM}{OM}\right)^2 &= 1 \\
\cos^2 x + \sin^2 x &= 1
\end{aligned}$$

■

Valeurs particulières importantes à connaitre!!!



On peut donc établir le tableau suivant :

valeur de x en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
valeur de x en degrés	0	30	45	60	90	180
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1