❉ Chapitre 5 ❉

Équation du second degré

Dans le chapitre précédent, nous avons vu comment résoudre une équation du second degré dans le cas ou l'on avait la forme factorisée. Dans ce chapitre, nous verrons ce qu'il se passe dans le cas général.

I. Le discriminant

Définition 1:

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$. On appelle **discriminant** associé à f le nombre $b^2 - 4ac$, noté Δ.

Exemple 1:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 3x + 2$.
On a $a = -1$ donc $a \neq 0$, $b = -3$ et $c = 2$. La fonction f est donc une fonction polynôme de degré 2.
Le discriminant de f est :

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = (-3)^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9 + 8 = 17$$

Propriété 1 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ »

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]
\end{aligned}$$

Donc $\quad ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$. ■

Remarque :

On appelle l'expression $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ est aussi appelée la forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$.

II. Résolution d'une équation du second degré

Définition 2:

Une **équation du second degré** est une équation qui peut s'écrire : $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$.

Rappels et vocabulaire : Résoudre, dans $\mathbb{R}$, une équation du second degré, c'est trouver tous les éléments de $\mathbb{R}$ pour lesquels l'égalité est vraie.

Résoudre cette équation revient à trouver les antécédents de 0 par une fonction du second degré; On dit que l'on cherche les **racines** du trinôme.

Propriété 2 :

Considérons l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$.

- Si $\Delta<0$ alors l'équation n'admet **pas de solution réelle**.
- Si $\Delta=0$ alors l'équation admet **une solution réelle** x_0 dite « double » :

$$x_0=\frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta>0$ alors l'équation admet **deux solutions réelles** x_1 et x_2 données par les formules suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Démonstration : *Exigible en fin de première*

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 &\iff a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0 \iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \quad \text{car } a\neq 0\\ &\iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}\end{aligned}$$

Raisonnons par disjonction des cas :

- Si $\Delta<0$: $\dfrac{\Delta}{4a^2}$ est strictement négatif. Or $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ est positif ou nul.

  Donc $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{\Delta}{4a^2}$ n'a pas de solution réelle. L'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a donc aucune solution réelle.
- Si $\Delta=0$:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \iff x+\frac{b}{2a}=0 \iff x=-\frac{b}{2a}$$

  L'équation a une solution réelle $S=\left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$
- Si $\Delta>0$: $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{\Delta}{4a^2} \quad > \quad 0$

$$\begin{aligned} x+\frac{b}{2a} &= -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \\ x+\frac{b}{2a} &= -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x &= -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x+\frac{b}{2a} &= +\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \\ x+\frac{b}{2a} &= +\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x &= -\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\end{aligned}$$

  L'équation a deux solutions réelles $S=\left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$ ■

Exemple 2:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2-3x+2$. On a vu que le discriminant de f est : $\Delta=17$.
$\Delta>0$ donc l'équation $-x^2-3x+2=0$ admet deux solutions :

$$x_1=\frac{3-\sqrt{17}}{-2} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{3+\sqrt{17}}{-2}$$

L'ensemble des solutions est $S=\left\{\dfrac{3+\sqrt{17}}{-2};\dfrac{3-\sqrt{17}}{-2}\right\}$.