❉ Chapitre 10 ❉

Étude d'une suite numérique

I. Sens de variation

Définition 1:

1. Une suite (u_n) est dite **croissante** si pour tout entier naturel $n \geqslant k$: $u_{n+1} \geqslant u_n$.
2. Une suite (u_n) est dite **décroissante** si pour tout entier naturel $n \geqslant k$: $u_{n+1} \leqslant u_n$.
3. Une suite (u_n) est dite **constante** si pour tout entier naturel $n \geqslant k$: $u_{n+1} = u_n$.

Méthode 1 :

On peut calculer la différence entre deux termes consécutifs, $u_{n+1} - u_n$

1. Si cette différence est toujours positive à partir d'un certain entier k, on peut en conclure que la suite est croissante.
2. Si cette différence est toujours négative à partir d'un certain entier k, on peut en conclure que la suite est décroissante.
3. Si cette différence est nulle à partir d'un certain entier k, on peut en conclure que la suite est constante.

Méthode 2 :

Cette méthode n'est valable que si les termes de la suite sont strictement positifs.
On peut calculer $\dfrac{u_{n+1}}{un}$.

1. Si ce ratio est toujours supérieur à 1 à partir d'un certain entier k, on peut en conclure que la suite est croissante.
2. Si ce ratio est toujours inférieur à 1 à partir d'un certain entier k, on peut en conclure que la suite est décroissante.
3. Si ce ratio est toujours égale à 1 à partir d'un certain entier k, on peut en conclure que la suite est constante.

Méthode 3 :

Cette méthode est applicable lorsque la suite est définie explicitement par une relation $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $[0; +\infty[$.

1. Si f est strictement croissante, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
2. Si f est strictement décroissante, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exemple 1:

1. Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = v_n - 2$ pour tout entier naturel n.
   Déterminons le sens de variation de la suite (v_n).
   $$v_{n+1} - v_n \quad = \quad v_n - 2 - v_n \quad = \quad -2$$
   -2 est négatif donc la suite (v_n) est décroissante.
2. Soit la suite (w_n) définie par $w_n = 3n + 7$ pour tout entier naturel n.
   Déterminons le sens de variation de la suite (w_n). La fonction $f : x \mapsto 3x + 7$ est une fonction affine croissante sur $\mathbb{R}$ $(a = 3 > 0)$. Donc la suite de terme général $w_n = f(n)$ est croissante.

II. Limite d'une suite

1. Limite finie

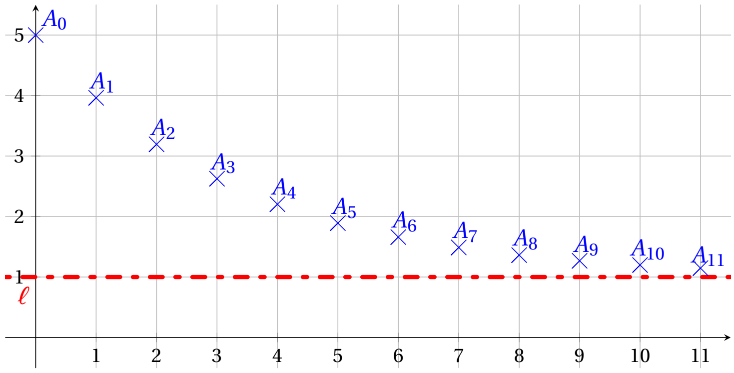
Définition 2:

Dire qu'une suite (u_n) a pour **limite un nombre réel ℓ quand n tend vers** $+\infty$ signifie que les termes de la suite, **à partir d'un certain rang**, se rapproche de ℓ

On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, on dit que la suite (u_n) **converge** vers ℓ.

Exemple 2:

On considère la suite (u_n) dont la représentation graphique est la liste de points A_n donné ci-dessous.



Plus la valeur de n augmente, plus les points représentant la suite (u_n) semble se rapprocher de la valeur de 1.

On dira que la suite converge vers 1 ou que la limite de la suite (u_n) vaut 1 quand n devient très grand et on note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$$

2. Limite infinie

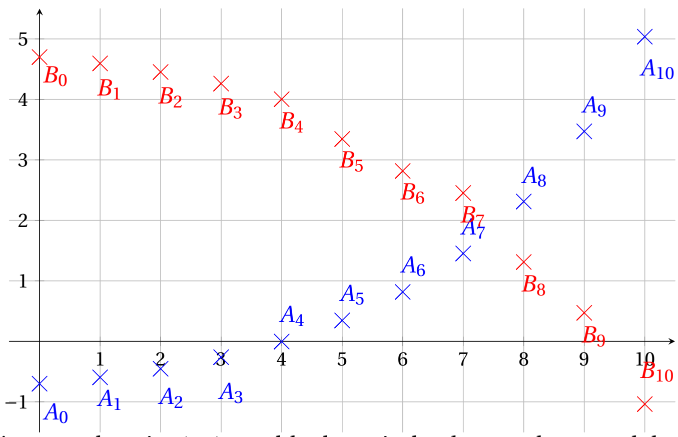
Définition 3:

Dire qu'une suite (u_n) a pour **limite ∞ quand n tend vers** $+\infty$ signifie que les termes de la suite, **à partir d'un certain rang**, se rapproche de ∞

On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \infty$, on dit que la suite (u_n) **diverge** vers ∞.

Exemple 3:

On considère la suite (u_n) dont la représentation graphique est la liste des points A_n donnés ci-dessous et (v_n) dont la représentation graphique est la liste des points B_n donnés ci-dessous.



Plus la valeur de n augmente, plus les points représentant la suite (u_n) semble devenir de plus en plus grand.

On dira que la suite diverge vers $+\infty$ ou que la limite de la suite (u_n) vaut $+\infty$ quand n devient très grand et on note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Plus la valeur de n augmente, plus les points représentant la suite (v_n) semble devenir de plus en plus grand dans les négatifs.

On dira que la suite diverge vers $-\infty$ ou que la limite de la suite (v_n) vaut $-\infty$ quand n devient très grand et on note :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$$