❄ Chapitre 16 ❄

Fonction exponentielle

I. Fonction exponentielle $x \longmapsto \exp(x)$

Propriété 1 :

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Démonstration : *Exigible en fin de première*

On admet qu'il existe une telle fonction. On montre l'unicité, l'existence est admise.

1. On montre qu'une telle fonction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ .Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = f(x) \times f(-x)$.
   Par produit (et composée), Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée de $x \longmapsto f(-x)$ est $x \longmapsto -f'(-x)$.
   D'après la formule de dérivée d'un produit, $(uv)' = u'v + uv'$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$
   Or, $f' = f$, ce qui donne $\Phi'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = 0$
   Comme $\Phi'(x) = 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$, la fonction Φ est constante. Or, $f(0) = 1$, donc $\Phi(0) = f(0)^2 = 1$.
   Φ est la fonction constante égale à 1. Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)f(-x) = 1$.
   La fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
2. Démonstration de l'unicité de la fonction f. Considérons une autre fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$.
   Alors g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   Par quotient de fonctions dérivables, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2} = \frac{f(x)g(x) - g(x)f(x)}{[g(x)]^2} = 0$$
   On en déduit que la fonction $\dfrac{f}{g}$ est constante sur $\mathbb{R}$.Or, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(0) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = 1$.
   Donc $\dfrac{f}{g}$ est la fonction constante égale à 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$.

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ ■

Définition 1:

On appelle fonction exponentielle l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. On note cette fonction **exp**.

II. Propriété de la fonction exponentielle

1. Relation fonctionnelle

Propriété 2 :

Pour tous réels x et y, on a : $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$

Démonstration :

Comme $\exp(x) \neq 0$, on pose $f(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$avec y un nombre réel.

Pour tout x, on a $f'(x) = \dfrac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp(x)}{\exp(x)^2} = 0$.

Donc la fonction f est constante.

Comme $f(0) = \frac{\exp(y}{\exp(0)}) = \exp(y)$, on en déduit que $\frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$ donc $\exp(x+y) = \exp(x).\exp(y)$ ■

Remarque :

Cette formule permet de transformer une somme en produit et réciproquement.

Propriété 3 :

Pour tous réels x et y, on a :

- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
- $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $\exp(nx) = \exp(x)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

Démonstration :

- $\exp(x)\exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1$ ■
- $\exp(x-y) = \exp(x+(-y)) = \exp(x)\exp(-y) = \exp(x)\frac{1}{\exp(y)} = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$ ■
- La démonstration s'effectue par récurrence. Elle n'est donc pas au programme de $1^{ère}$ générale.

2. Le nombre e

Définition 2:

L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e. On a ainsi $\exp(1) = e$

Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e :

$$e^1 = 2.718281828...$$

Nouvelle notation :

$$\exp(x) = \exp(x \times 1) = \exp(1)^x = e^x$$

Définition 3:

On note pour tout x réel, $\exp(x) = e^x$

Un peu d'histoire :

Comme π, le nombre e est un nombre irrationnel, c'est à dire qu'il s'écrit avec un nombre infini de décimales sans suite logique. Ses premières décimales sont :

$e \simeq 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663035354759457138217\ldots$

Le nombre e est également un nombre transcendant. On dit qu'un nombre est transcendant s'il n'est solution d'aucune équation à coefficients entiers. Le nombre $\sqrt{2}$ par exemple, est irrationnel mais n'est pas transcendant puisqu'il est solution de l'équation $x^2 = 2$.
Un tel nombre est dit « algébrique ».

Le premier à s'intéresser de façon sérieuse au nombre e est le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707;1783). C'est à lui que nous devons le nom de ce nombre. Non pas qu'il s'agisse de l'initiale de son nom mais peut être car e est la première lettre du mot exponentiel.

Dans « *Introductio in Analysin infinitorum* »publié en 1748, Euler explique que :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...$$

Par cette formule, il obtient une estimation de e avec 18 décimales exactes. Nous devons aussi à Euler la démonstration de l'irrationalité de e.

Avec cette nouvelle notation, on peut ainsi résumer l'ensemble des propriétés de la fonction exponentielle :

Propriété 4 :

Pour tous réels x et y, on a :

- $e^0 = 1$ et $e^1 = e$
- $e^x > 0$ et $(e^x)' = e^x$
- $e^{x+y} = e^x e^y$, $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$, $(e^x)^n = e^{nx}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Remarque :

On retrouve les propriétés des puissances.

III. Étude de la fonction exponentielle

1. Dérivabilité

Propriété 5 :

La fonction exponentielle est dérivable, donc continue sur $\mathbb{R}$ et $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

Démonstration :

Conséquence directe de la définition 1 ■

2. Sens de variation

Propriété 6 :

La fonction exponentielle est positive et croissante sur $\mathbb{R}$

Démonstration :

On a démontré précédemment que la fonction exponentielle ne s'annule jamais.
Or, par définition, $\exp(0) = 1$ donc pour tout x, $\exp(x) > 0$.
Comme $\exp'(x) = \exp(x) > 0$, la dérivée de la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$ donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. ■

Représentation graphique

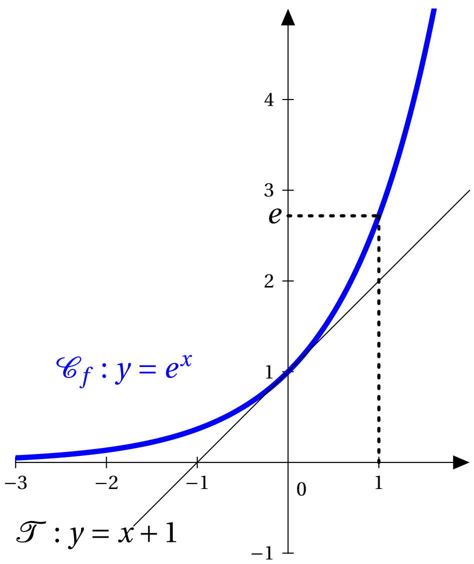

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x)$	0 $\nearrow$	1 $\nearrow$	$+\infty$

IV. Équations et inéquations

Propriété 7 :

Pour tous réels x et y : $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y \iff x = y$ et $\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^y \iff x < y$

Démonstration :

Ces propriétés sont des conséquences directes de la continuité et de la stricte croissance de $x \mapsto \mathrm{e}^x$. Ainsi,

$$\begin{array}{rrcl} & \mathrm{e}^x & = & \mathrm{e}^y \\ \iff & \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-y} & = & 1 \\ \iff & \mathrm{e}^{x-y} & = & 1 \\ \iff & x-y & = & 0 \\ \iff & x & = & y \end{array}$$

$\blacksquare$

Remarque :

On a les équivalences analogues en remplaçant le symbole $<$ par $>$, $\leqslant$ ou $\geqslant$.

Exemple 1:

Résolvons l'équation $\mathrm{e}^{3x+5} = \mathrm{e}^{2x+4}$.

$$\begin{array}{rrcl} & \mathrm{e}^{3x+5} & = & \mathrm{e}^{2x+4} \\ \iff & 3x+5 & = & 2x+4 \\ \iff & x & = & -1 \end{array}$$

Exemple 2:

Résolvons l'inéquation $\mathrm{e}^{x^2} > \mathrm{e}^{4x-4}$.

$$\begin{array}{rrcl} & \mathrm{e}^{x^2} & > & \mathrm{e}^{4x-4} \\ \iff & x^2 & > & 4x-4 \\ \iff & x^2-4x+4 & > & 0 \\ \iff & (x-2)^2 & > & 0 \\ \iff & x^2 & \in & \mathbb{R}/\,\{2\} \end{array}$$

V. Fonction $x \longmapsto e^{ax+b}$

Propriété 8 :

La fonction $f : x \mapsto e^{ax+b)}$ est dérivable sur I et pour tout x de I $f'(x) = a \times e^{ax+b}$.

Exemple 3:

Dérivons la fonction f défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x-8}$.
On a $f(x) = e^{ax+b}$ avec $a = 3$ et $b = -8$.

$$f'(x) \quad = \quad a \times e^{ax+b} \quad = \quad 3e^{3x-8}$$