❄ Chapitre 8 ❄

Fonctions dérivées

I. Dérivées des fonctions de référence

Définition 1:

Une fonction f est dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en tout réel a de I.
Si f est dérivable sur I, la fonction dérivée de f sur I la fonction notée f', définie sur I est : $f' : a \to f'(a)$

Exemple 1:

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
On utilise la définition 1. Soit $a \in \mathbb{R}$, on calcul :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2a+h = 2a\end{aligned}$$

Donc, quelque soit le réel $a \in \mathbb{R}$, on a $f'(a) = 2a$. La fonction f est donc dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$, donc f admet une fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'(x) = 2x$.

Propriété 1 :

Fonction f	Domaine de définition	Fonction dérivée f'	Domaine de dérivabilité
k constante	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	$\mathbb{R}$	1	$\mathbb{R}$
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[=\mathbb{R}/\{0\}=\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[=\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[=\mathbb{R}^{+*}$

Remarque :

On peut démontrer ces résultats à l'aide de la définition 1 en suivant la méthode vu pour la fonction carrée dans l'exemple 1. On le fera d'ailleurs dans les exercices 1 et 2.

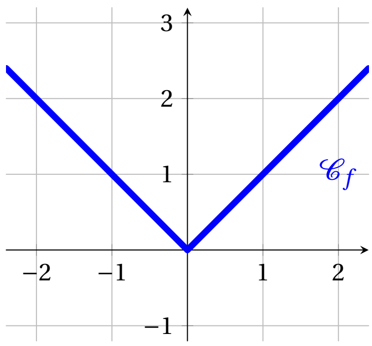
1. La fonction valeur absolue

Définition 2:

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ est appelée **fonction valeur absolue**.

Propriété 2 :

Si $x \leqslant 0$ alors $|x| = -x$ et si $x \geqslant 0$ alors $|x| = x$.



Remarque :

Montrons que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

- Si $x < 0$ alors $\frac{|x|-|0|}{x-0} = \frac{|x|}{x} = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{|x|-|0|}{x-0} = -1$
- Si $x > 0$ alors $\frac{|x|-|0|}{x-0} = \frac{|x|}{x} = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{|x|-|0|}{x-0} = 1$

Le taux de variation n'admet donc pas la même limite à gauche et à droite de 0.
Donc la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

II. Dérivées et opérations

1. Somme de deux fonctions, produit d'une fonction par un réel

Propriété 3 :
Si $f(x) = u(x) + v(x)$ avec u et v deux fonctions dérivables sur $]a; b[$, alors f est dérivable sur $]a; b[$ et

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Exemple 2:

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{5}$.

On a une fonction de la forme $f(x) = u(x) + v(x)$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = \frac{2}{5}$

On calcule les dérivées des fonctions u et v : $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x) = 0$

Donc $f'(x) = u'(x) + v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Propriété 4 :
Si $f(x) = \lambda u(x)$ où λ est un nombre réel et u une fonction dérivable sur $]a; b[$, alors f est dérivable sur $]a; b[$ et

$$f'(x) = \lambda u'(x)$$

Exemple 3:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3}{6}$.

On a une fonction de la forme $f(x) = \lambda u(x)$ avec $\lambda = \frac{1}{6}$ et $u(x) = x^3$

Donc $f'(x) = \lambda u'(x) = \frac{1}{6} \times (3 \times x^2) = \frac{1}{2}x^2 = \frac{x^2}{2}$

2. Dérivée d'une composée de fonction de la forme $f : x \mapsto u(ax + b)$

Propriété 5 :
Soit a et b deux réels, a étant non nul, soit u définie et dérivable sur I et soit f la fonction définie par : $f : x \mapsto u(ax + b)$.
Dans ces conditions, la fonction f est dérivable et on a : $f' : x \mapsto au'(ax + b)$

Exemple 4:
Soit f la fonction définie sur $[7; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{4x - 28}$.
On a une fonction de la forme $f(x) = u(ax + b)$ avec $u(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$ et $b = -28$
On calcule la dérivée de la fonction u : $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Donc $f'(x) = a \times u'(ax + b) = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{4x - 28}} = \frac{1}{\sqrt{x - 7}}$

3. Produit de deux fonctions

Propriété 6 :
Si $f(x) = u(x)v(x)$ avec u et v deux fonctions dérivables sur $]a; b[$ alors la fonction f est dérivable sur $]a; b[$ et

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Exemple 5:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2+3)\times(x^6+5)$.
On a une fonction de la forme $f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x^2+3$ et $v(x) = x^6+5$
On calcule les dérivées des fonctions u et v : $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 6x^5$
Donc

$$f'(x) = u'(x)v(x)+u(x)v'(x) = 2x\times(x^6+5)+(x^2+3)\times 6x^5 = 8x^7+18x^5+10x$$

4. Inverse d'une fonction, quotient de deux fonctions

Propriété 7 :

Si $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ où u est une fonction dérivable sur $]a;b[$ et si $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a;b[$, alors f est une fonction dérivable sur $]a;b[$ et

$$f'(x) = -\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$$

Exemple 6:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}/\left\{\sqrt{6}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2-6}$.

On a une fonction de la forme $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = x^2+6$

On calcule la dérivée de la fonction u : $u'(x) = 2x+0$

Donc

$$f'(x) = -\frac{u'(x)}{[u(x)]^2} = -\frac{2x)}{\left(x^2-6\right)^2}$$

Propriété 8 :

Toute fonction rationnelle est définie pour tout x tel que $v(x) \neq 0$.
Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

Propriété 9 :

Si $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où u et v sont deux fonctions dérivables sur $]a;b[$ et si $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a;b[$, alors f est une fonction dérivable sur $]a;b[$ et

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Exemple 7:

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

On a une fonction de la forme $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = x$

On calcule les dérivées des fonctions u et v : $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x) = 1$

Donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\times x-\sqrt{x}\times 1}{x^2} = \frac{\frac{x}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{x^2} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{x^2} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{2}-\sqrt{x}}{x^2} = \frac{\frac{-\sqrt{x}}{2}}{x^2} = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2} = -\frac{1}{2x\times\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Remarque :

On aurait pu trouver ce résultats plus simplement en pensant dès le début a la simplification suivante : $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Avec cette simplification on peut appliquer la propriété 6, ce qui donne directement le résultat.

Formulaire de dérivation : fonction de première et de terminale

Dérivées des fonctions de référence

Fonction f	Domaine de définition	Fonction dérivée f'	Domaine de dérivabilité
$k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	$\mathbb{R}$	1	$\mathbb{R}$
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[=\mathbb{R}/\{0\}=\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[=\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[=\mathbb{R}^{+*}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$

Dérivées et opérations

Fonction f	Fonction dérivée f'
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$u(x)\times v(x)$	$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
$u(ax+b)$	$a\times u'(ax+b)$
$\frac{1}{u(x)}$	$-\frac{u'(x)}{u(x)^2}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$
$(f\circ g)(x)$ ou $g(f(x))$	$g'(x)\times(f'\circ g)(x)$

Cas particulier de fonction composée

Fonction f	Fonction dérivée f'
$(ax+b)^n$	$na(ax+b)^{n-1}$
$\sqrt{ax+b}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$
e^{ax+b}	$a\,\mathrm{e}^{ax+b}$
$\ln(ax+b)$	$\frac{a}{ax+b}$