❉ Chapitre 20 ❉

# Fonctions trigonométriques

## I. Angles associés

**Propriété 1 :**

Pour tout nombre réel $x$, on a :

- $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

## II. Fonctions sinus et cosinus

**Définition 1:**

1. La fonction cosinus est la fonction qui, à tout réel $x$, associe $\cos(x)$.
2. La fonction sinus est la fonction qui, à tout réel $x$, associe $\sin(x)$.

### 1. Périodicité

**Définition 2:**

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. $f$ est périodique de période $T$ si et seulement si $f(x+T) = f(x)$.

D'après la construction du cosinus et du sinus sur le cercle trigonométrique, on en déduit que :

- $\begin{cases} \cos(x+2\pi) = \cos x \\ \sin(x+2\pi) = \sin x \end{cases}$

**Propriété 2 :**

Les fonctions sinus et cosinus sont $2\pi$-périodiques, c'est à dire qu'elle se répètent de manière identique tous les $2\pi$

### 2. Parité

**Définition 3:**

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. $f$ est une fonction paire si et seulement si $f(-x) = f(x)$.

**Définition 4:**

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. $f$ est une fonction impaire si et seulement si $f(-x) = -f(x)$.

D'après la construction du cosinus et du sinus sur le cercle trigonométrique, on en déduit que :

- $\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$

**Propriété 3 :**

La fonction cosinus est paire et que la fonction sinus est impaire.

## 3. Courbes représentatives

**Propriété 4 :**

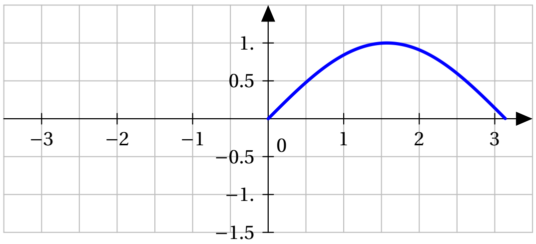
On se place dans un repère orthogonale $(O; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath}\,)$.

- Les fonctions sinus et cosinus étant $2\pi$-périodiques, les courbes représentatives de ces fonctions sont invariantes par translation de vecteur $2\pi\,\vec{\imath}$
- La fonction sinus étant impaire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère $O$.
- La fonction cosinus étant paire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnée $(O\,\vec{\jmath}\,)$.

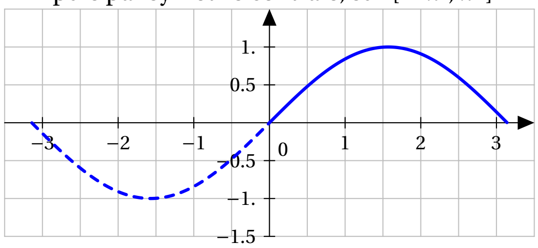
**Fonction sinus**

On déduit du cercle trigonométrique sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath}\,)$

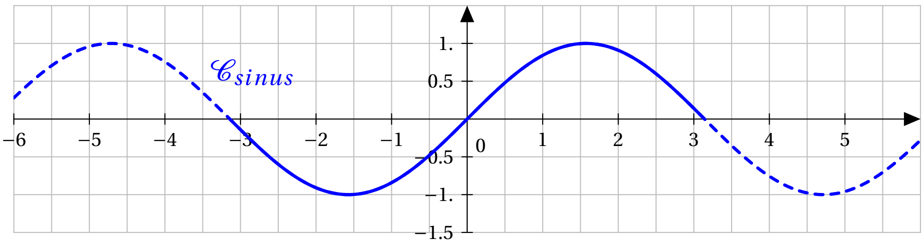
sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ \pi\ ]$,



puis par symétrie centrale, sur $[\ -\pi\ ;\ \pi\ ]$



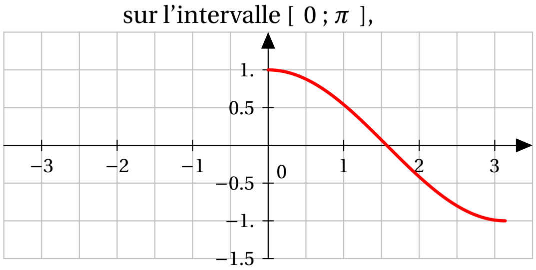
puis par translation, on obtient la courbe représentative de la fonction sinus qui s'appelle une **sinusoïde**



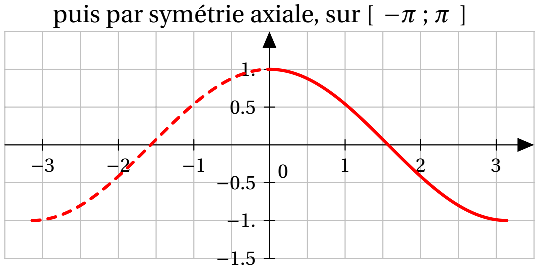

**Fonction cosinus**

On déduit du cercle trigonométrique sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath}\,)$

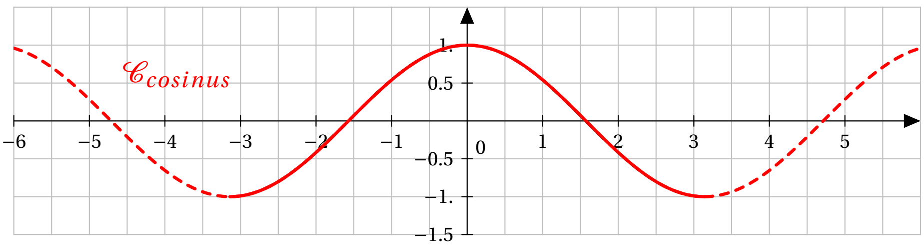
sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ \pi\ ]$,



puis par symétrie axiale, sur $[\ -\pi\ ;\ \pi\ ]$



par translation, on obtient la courbe représentative de la fonction cosinus qui s'appelle une **sinusoïde** :



# III. Fonctions trigonométriques appliquées aux sciences

On rencontre des fonctions trigonométriques en physique pour modéliser des phénomènes périodiques ou pseudo-périodiques.

Par exemple, on retrouve ces fonctions dans des domaines tel que :

- l'optique géométrique avec la loi de Descartes.
- l'optique ondulatoire notamment pour le calcul de l'intensité lumineuse lors des phénomènes de diffraction et d'interférences.
- la modulation d'un signal utilisant les transformées de Fourier.
- l'étude d'un signal électrique transitoire dans certains circuits.

Pour modéliser ces phénomènes, les physiciens utilise souvent des fonctions de la forme :

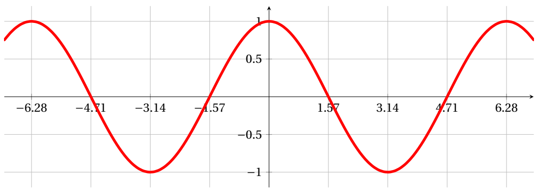
$$t \longmapsto A\sin\left(\omega t+\varphi\right) \text{ ou } t \longmapsto A\cos\left(\omega t+\varphi\right)$$

## 1. Influence des différents paramètres

Dans la suite du cours, on part d'une fonction de départ du type cosinus, mais on obtient exactement la même chose avec des fonctions de type sinus.

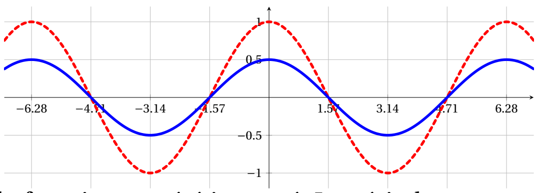
Partons de la représentation graphique de la fonction cosinus :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \cos(t) \end{array}$$




• Testons l'influence du paramètre A en traçant la courbe représentative de la fonction :

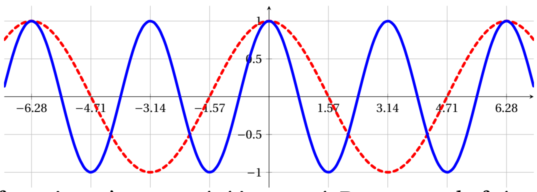
$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & 0.5\cos(t) \end{array}$$




On remarque que les valeurs minimales et maximales de la fonction ont été impacté. La période par contre ne subit aucun changement. Le coefficient $A$ représente **l'amplitude** de la fonction.

• Testons l'influence du paramètre $\omega$ en traçant la courbe représentative de la fonction :

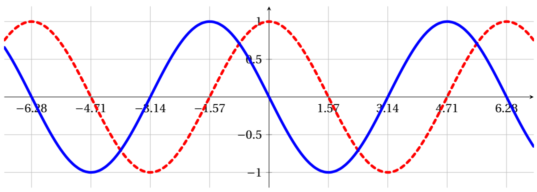
$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \cos(2t) \end{array}$$




On remarque que les valeurs minimales et maximales de la fonction n'ont pas été impacté. Par contre la fréquence (et donc la période) a été modifié. Le coefficient $\omega$ représente la **pulsation** (exprimée en radians par seconde rad/s). Elle est proportionnelle à la fréquence : $\omega = 2\pi f$ (En connaissant la formule $f = \dfrac{1}{T}$, on a aussi la relation $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$)

• Testons l'influence du paramètre $\varphi$ en traçant la courbe représentative de la fonction :

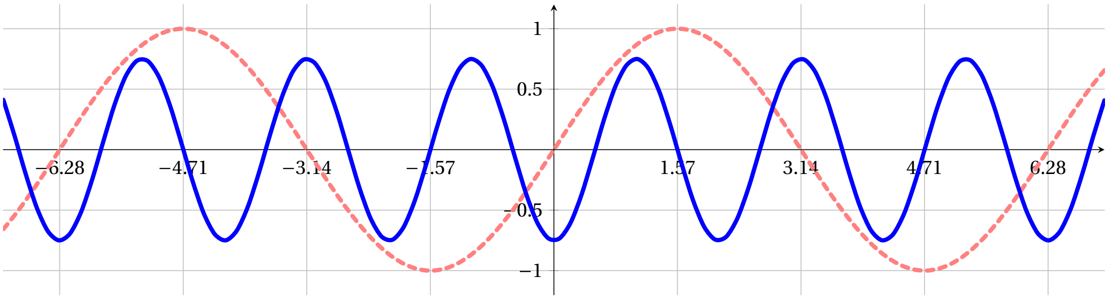
$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \cos\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right) \end{array}$$




On remarque que la courbe s'est « décalé » de $\dfrac{\pi}{2}$ vers la gauche. Le coefficient $\varphi$ représente la **phase à l'origine** (exprimée en radians rad). Elle peut également se noter $\Phi$ (Phi majuscule) $\psi$ (Psi minuscule) ou $\Psi$ (Psi majuscule).

## Exemple 1:

Soit $f$ une fonction dont la courbe est donnée sur le graphique ci-dessous.




On sait que cette courbe est de la forme $t \mapsto A\sin(\omega t + \varphi)$, l'objectif est de déterminer les valeurs des trois paramètres $A$, $\omega$ et $\varphi$.

On représente la fonction $\sin t$ (ici en rouge sur le graphique).

- L'amplitude $A$ de cette fonction est de 0.75
- On remarque que sur une période de la fonction $\sin t$, il y a 3 période de la fonction $f$. Donc $\omega = 3$.
- On voit que la courbe en bleu est décalé de la courbe en rouge d'environ $\frac{3\pi}{2}$. La phase a l'origine $\varphi$ est donc égale à $\frac{3\pi}{2}$

Finalement on obtient :

$$f(t) = 0.75 \times \sin\left(3t + \frac{3\pi}{2}\right)$$