❉ Chapitre 17 ❉

Géométrie repérée

Dans tout ce chapitre, on munira le plan d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$.

I. Rappel : vecteur directeur et équation de droite

Définition 1:

Soient A et B deux point d'une droite $\mathscr{D}$ du plan.
On appelle vecteur directeur de $\mathscr{D}$ tout vecteur $\vec{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Propriété 1 :

Toute droite du plan de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ à pour équation cartésienne :

$$ax+by+c=0 \quad \text{avec } a,\ b,\ c\in\mathbb{R} \text{ et } a \text{ ou } b \text{ non nul}$$

Démonstration :

Proposition à démontrer : « Toute droite du plan de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ à pour équation cartésienne $ax+by+c=0$ avec $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$ et a ou b non nul

Voir cours de seconde : « Droite et système »

II. Vecteur normal à une droite

Définition 2:

Un vecteur $\vec{n}$ est dit normal à une droite d si il est orthogonal à tous les vecteurs directeurs de cette droite.

Exemple 1:

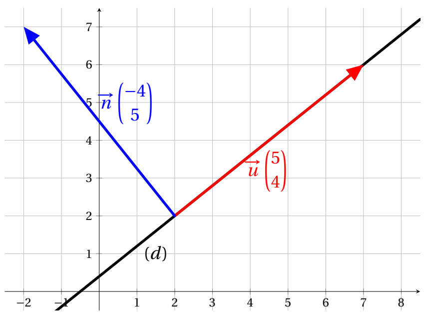
Vérifions si le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite d d'équation cartésienne $4x-5y+2=0$.

Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$.

$\vec{n}$ est un vecteur normal à d si $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$:

$$\vec{n}\cdot\vec{u} \quad = \quad -4\times5+5\times4 \quad = \quad -20+20 \quad = \quad 0$$

$\vec{n}$ est un vecteur normal à d.



Propriété 2 :

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite d d'équation cartésienne $ax+by+c=0$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite d d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ »

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d. Pour tout $k\in\mathbb{R}$, calculons $\vec{n}\cdot(k\vec{u})$

$$\vec{n}\cdot(k\vec{u}) \quad = \quad k\times\vec{n}\cdot\vec{u} \quad = \quad k\times(a\times(-b)+a\times b) \quad = \quad k\times 0 \quad = \quad 0$$

Donc $\vec{n}$ est orthogonal à tous les vecteurs directeurs de d, donc d'après la définition, c'est un vecteur normal à d. ■

Propriété 3 :

La droite qui admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ comme vecteur normal et qui passe par le point $A(x_A;y_A)$ a une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$

Démonstration :

Un point M appartient à la droite si et seulement si les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ sont orthogonaux, c'est à dire si leur produit scalaire est nul.

$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0 &\iff a(x-x_A)+b(y-y_A)=0 &= ax-ax_A+by-by_A=0\\ &\iff ax+by-ax_A-by_A=0 &= ax+by+c=0 \qquad \text{avec } c=(-ax_A-by_A)\end{aligned}$$

Donc la droite qui admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ comme vecteur normal et qui passe par le point $A(x_A;y_A)$ a une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$ ■

Exemple 2:

Un point M appartient à la droite qui passe par $A(-2;3)$ et qui a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ si et seulement si

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0 \iff 2(x+2)+5(y-3)=0 \iff 2x+5y-11=0$

III. Équation de cercle

Définition 3:

On appelle cercle de centre Ω et de rayon $r>0$ l'ensemble des points M du plan qui sont à distance r du centre. On le note $\mathscr{C}_{(\Omega,r)}$.

Propriété 4 :

Soient x_Ω et y_Ω deux réels. Une équation du cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon r est

$$(x-x_\Omega)^2+\left(y-y_\Omega\right)^2=r^2$$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « Une équation du cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon r est : $(x-x_\Omega)^2+\left(y-y_\Omega\right)^2=r^2$ »

Le point M appartient au cercle $\mathscr{C}_{(\Omega,r)}$, si sa distance au centre est égale au rayon r. On applique donc la formule de la distance entre deux points dans un repère orthonormé :

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-x_\Omega)^2+\left(y-y_\Omega\right)^2} &= \Omega M\\ (x-x_\Omega)^2+\left(y-y_\Omega\right)^2 &= \Omega M^2\\ (x-x_\Omega)^2+\left(y-y_\Omega\right)^2 &= r^2\end{aligned}$$

On en déduit que l'équation du cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon r est $(x-x_\Omega)^2+\left(y-y_\Omega\right)^2=r^2$ ■

Exemple 3:

Une équation du cercle de centre $A(-1;6)$ et de rayon $\sqrt{5}$ est :

$$\begin{aligned}(x-(-1))^2+\left(y-6\right)^2 &= \sqrt{5}^2\\ (x+1)^2+\left(y-6\right)^2 &= 5\\ x^2+y^2+2x-12y+32 &= 0\end{aligned}$$