❉ Chapitre 3 ❉

Indépendance de deux événements

I. Évènements indépendants

Définition 1:

On dit que deux événements A et B sont indépendants lorsque :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Propriété 1 :

Soient A et B deux événements d'un univers Ω tels que $P(A) \neq 0$.

A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Démonstration :

On va montrer que « A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$ ».

On doit démontrer une équivalence. Pour cela, on doit démontrer le sens direct puis le sens indirect.

Sens direct : On suppose que A et B sont indépendants.
Donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, d'où $P_A(B) = \dfrac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B)$.
Donc A et B sont indépendants $\Longrightarrow P_A(B) = P(B)$

Sens direct : On suppose que $P_A(B) = P(B)$.
Donc $P(A) \times P_A(B) = P(A) \times P(B)$, d'où $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
Donc $P_A(B) = P(B) \Longrightarrow A$ et B sont indépendants.

Donc A et B sont indépendants $\Longleftrightarrow P_A(B) = P(B)$ ■

Propriété 2 :

Si les événements A et B sont indépendants, alors :

- $\overline{A}$ et B sont indépendants
- A et $\overline{B}$ sont indépendants
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration :

On va montrer que « (A et B indépendants) $\Longrightarrow$ ($\overline{A}$ et B indépendants) ».

Supposons que A et B soient indépendants.

On peut se limiter au cas où $P(B) \neq 0$ (si $P(B) = 0$, le résultat est évident), de sorte que $P_B(A)$ et $P_B(\overline{A})$ soient définies.

On va montrer que $\overline{A}$ et B sont indépendants, soit $P_B(\overline{A}) = P(\overline{A})$.

On a toujours $P_B(A) + P_B(\overline{A}) = 1$.

$$\begin{aligned} P_B(A) + P_B(\overline{A}) &= 1 \\ P_B(\overline{A}) &= 1 - P_B(A) \\ &= 1 - P(A) \quad \text{Comme } A \text{ et } B \text{ sont indépendants, } P_B(A) = P(A). \\ &= P(\overline{A}) \end{aligned}$$

Donc $P_B(\overline{A}) = P(\overline{A})$. On en déduit que les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants ■

II. Succession de deux épreuves indépendantes

Définition 2:

En réalisant successivement deux expériences aléatoires telles que les événements associés à la première soient indépendants des événements associés à la seconde, on dit que l'on réalise une succession de deux épreuves indépendantes.

Remarque :

- Deux épreuves sont indépendantes si le résultat de l'une n'a pas d'influence sur le résultats de l'autre.
- L'indépendance fait partie de la modélisation. Par exemple, quand on réalise une succession de deux tirages avec remise, on considère qu'il y a indépendance car après le 1^er^ tirage et la remise, on revient à la situation de départ.

Propriété 3 :

On peut représenter une succession de deux épreuves indépendantes par un arbre dont les pondérations sont les probabilités (non conditionnelles) des différents résultats pour chacune des épreuves.

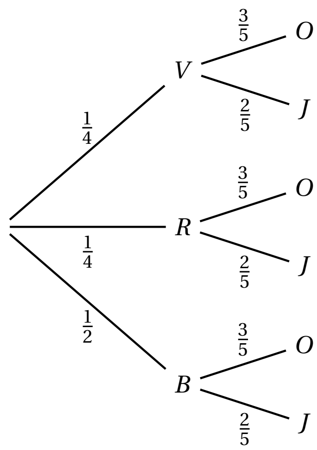
Exemple 1:

On place 1 boule verte, 1 boule rouge et 2 boules bleues dans l'urne 1 puis 3 boules oranges et 2 boules jaunes dans l'urne 2. On tire une boule dans l'urne 1 puis une boule dans l'urne 2.

On admet que ces deux épreuves sont indépendantes, donc que les événements V : « La 1^er^ boule est verte », R : « La 1^er^ boule est rouge » et B : « La 1^er^ boule est bleue » sont indépendants des événements O : « La 2^e^ boule est orange » et J : « La 2^e^ boule est jaune ».
Ainsi, on a :

- $P_V(O) = P_R(O) = P_B(O) = P(O) = 0,6$
- $P_V(J) = P_R(J) = P_B(J) = P(J) = 0,4.$

On peut donc représenter la situation par l'arbre ci-contre.



Propriété 4 :

On peut représenter une succession de deux épreuves indépendantes par un tableau à double entrée dont la 1^er^ ligne contient les résultats de la 1^er^ épreuve et la 1^er^ colonne ceux de la 2^e^ épreuve (ou inversement) et les cases intérieures les probabilités associées obtenues par produit.

Exemple 2:

Dans l'exemple précédent, on peut aussi représenter la situation par le tableau suivant :

Épreuve 1 / Épreuve 2	V	R	B
O	$0,25 \times 0,6 = 0,15$	$0,25 \times 0,6 = 0,15$	$0,5 \times 0,6 = 0,3$
J	$0,25 \times 0,4 = 0,1$	$0,25 \times 0,4 = 0,1$	$0,5 \times 0,4 = 0,2$