❉ Chapitre 6 ❉

Nombres dérivés

I. Variations d'une fonction

1. Aspect graphique

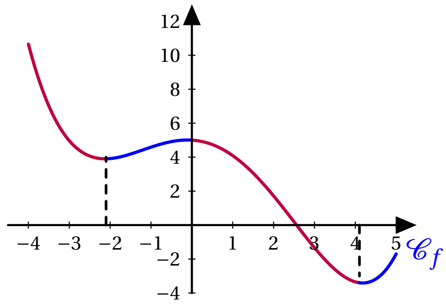
Définition 1:

Donner les variations d'une fonction signifie préciser sur quels intervalles la fonction est croissante, puis sur quels intervalles la fonction est décroissante.

Exemple 1:

Dans cet exemple, on se contente de décrire graphiquement ce que l'on observe sans rien démontrer formellement.

- Graphiquement, cette fonction est semble décroissante sur $[-4;-2,1]$, croissante sur $[-2,1;0]$, décroissante sur $[0;4,1]$, puis croissante $[4,1;5]$.
- Ou encore : f est semble croissante sur $[-2,1;0]$ et sur $[4,1;5]$, décroissante sur $[-4;-2,1]$ et sur $[0;4,1]$.



Le tableau de variation d'une fonction est un tableau synthétique regroupant les informations concernant les variations de la fonction.

Exemple 2:
Le tableau de variation de la fonction f est :

x	-4		-2.1		0		4.1		5
f	11	↘	4	↗	5	↘	-3	↗	-2

2. Aspect algébrique

Définition 2:

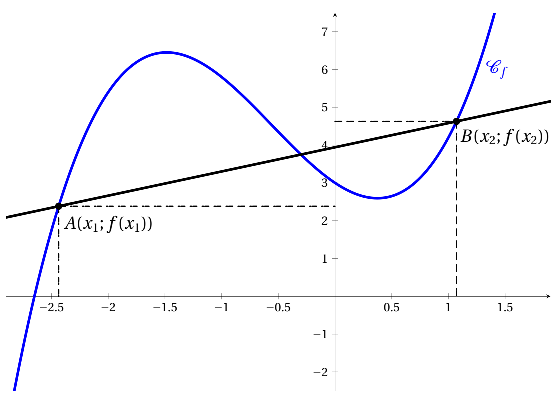
On considère la fonction f défini sur un ensemble I et deux nombres réels distincts x_1 et x_2 de I.

On appelle taux de variations de f entre x_1 et x_2 le nombre

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \quad \text{ou encore} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ce taux de variations correspond au coefficient directeur de la droite passant par les points de coordonnées $(x_1;f(x_1))$ et $(x_2;f(x_2))$.

Simulation Géogébra



Exemple 3:

Calculons le taux de variation de la fonction, $f: x \mapsto x^2$.

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{{x_2}^2-{x_1}^2}{x_2-x_1} = \frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{x_2-x_1} = x_2+x_1$$

Le taux de variation pour la fonction carrée est toujours égale à x_2+x_1.

Propriété 1 :

On considère une fonction f définie sur un intervalle I.

- Pour tout réels distincts x_1 et x_2 de l'intervalle I le taux de variation $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ est **positif** si et seulement si la fonction f est **croissante** sur I.
- Pour tout réels distincts x_1 et x_2 de l'intervalle I le taux de variation $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ est **négatif** si et seulement la fonction f est **décroissante** sur I.

Exemple 4:

Nous allons étudiez le sens de variation de la fonction carrée.
Pour cela nous avons besoin du signe du taux de variation. Dans l'exemple précédent, nous avons vu que le taux de variation pour la fonction carrée est toujours égale à x_2+x_1.

Nous allons raisonner par disjonction des cas :

- Si x_1 et x_2 sont positifs donc $I=[0;+\infty[$, x_2+x_1 est positif.
- Si x_1 et x_2 sont négatifs donc $I=]-\infty;0]$, x_2+x_1 est négatif.

La fonction carrée est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$.

Remarque :

Bien que cette méthode soit déjà plus efficace que de revenir à la définition d'une fonction croissante, nous verrons des méthodes encore plus efficace pour étudier les variations d'une fonction dans les chapitres sur la dérivation.

II. Tangente à une courbe : aspect graphique

1. Coefficient directeur d'une droite

Propriété 2 :

On considère la droite (d) non parallèle à l'axe des ordonnées.
Si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ appartiennent à la droite(d), le coefficient directeur m de la droite (d) vérifie :

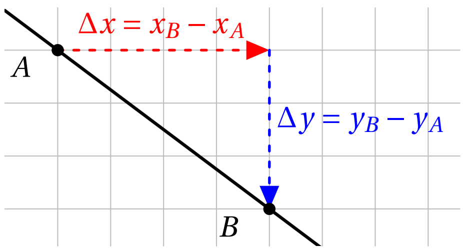
$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

Remarque :

En physique, on utilise souvent la notation Δx pour x_B-x_A et Δy pour y_B-y_A.
Nous avons alors avec cette écriture

$$m = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

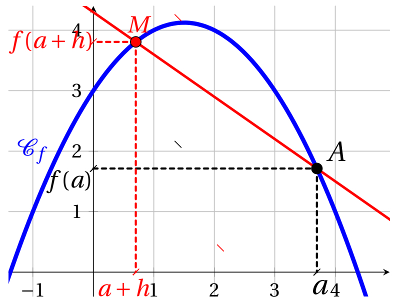
Δx et Δy peuvent directement être lu sur le graphique comme ci-contre :



Pour une fonction affine, le coefficient directeur est donc égale au taux de variation.

2. Sécantes à une courbe et taux de variation

Définition 3:
Le taux de variation de la fonction f au point A d'abscisse a est le nombre $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

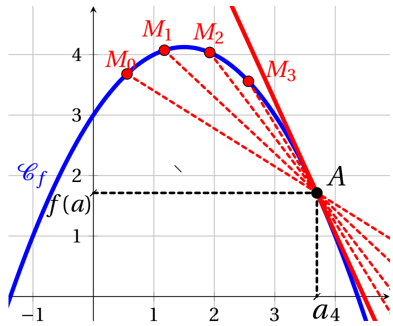


On note cette quantité de plusieurs manière différente :

- En mathématiques, on utilise généralement $\tau(a)$.
- Les physiciens lui préfèrent la notation $\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)_a$ qui a l'avantage d'être plus « parlante ».

3. Sécante en un point et position limite

Définition 4:
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f au point A d'abscisses a est la droite passant par le point A, position limite des sécantes à la courbe $\mathscr{C}_f$ passant par A.



III. Aspect algébrique : équation de tangente

1. Nombre dérivé

Définition 5:
Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a.
Dire que f est dérivable en a, c'est dire que lorsque h se rapproche de 0, le taux de variation entre a et $a+h$ se rapproche d'une valeur ℓ, ce que l'on note :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell \qquad \ell \text{ est appelé le } \textbf{nombre dérivé de } f \textbf{ en } a$$

Remarque :
Pour désigner le nombre dérivé d'une fonction f en un point a, les mathématiciens emploient la notation $f'(a)$ due au mathématicien français Joseph-Louis LAGRANGE (1736 – 1813).

Les physiciens privilégient la notation différentielle introduite, en 1684, par le mathématicien et philosophe allemand Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646 – 1716), dans son traité « Nouvelle méthode pour chercher les maxima, les minima, ainsi que les tangentes ...».

Par exemple, la dérivée de la vitesse par rapport au temps est noté $\dfrac{dv}{dt}$ ou encore $\dot{v}$. Cette notation dernière notation est appelée « notation de Newton ».

Exemple 5:
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-6x+11$. Montrons que f est dérivable en 2.

Calculons le taux de variations entre 2 et $2+h$: $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$
Pour calculer ce taux de variations, on a besoin de $f(2+h)$ et de $f(2)$.

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^3-6\times 2+11 \\ &= 8-12+11 \\ &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2+h) &= (2+h)^3-6\times(2+h)+11 \\ &= (2+h)(4+4h+h^2)-(12+6h)+11 \\ &= 8+8h+2h^2+4h+4h^2+h^3-12-6h+11 \\ &= 7+6h+6h^2+h^3 \end{aligned}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{7+6h+6h^2+h^3-7}{h} = \frac{6h+6h^2+h^3}{h} = 6+6h+h^2$$

Donc :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} 6+6h+h^2 = 6$$

Donc f est dérivable en 2 et $f'(2)=6$.

Démonstration : *Exigible en fin de première*

Propriété à démontrer : « La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. »

Calculons le taux de variations $f : x \mapsto \sqrt{x}$ entre 0 et $0+h$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

Donc si la fonction racine carrée est dérivable en 0, alors il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que :

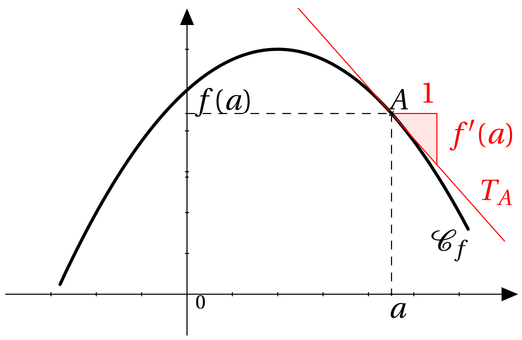
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \ell\\ \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h}} &= \ell\\ \frac{1}{0} &= \ell \qquad \text{Impossible}\end{aligned}$$

Donc la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

2. Équation de la tangente

Définition 6:

Soit f une fonction dérivable en a, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A est la droite passant par le point A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.



Propriété 3 :

Soit f une fonction dérivable en a, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.
La tangente T_A en A à $\mathscr{C}_f$ a pour équation :

$$T_A : y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

Démonstration :

On remarquera que la tangente T_A est une droite, de coefficient directeur donné $(f'(a))$ et passant par le point A de coordonnée $(a; f(a))$

Exemple 6:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-6x+11$. Déterminons cette fois l'équation de la tangente en 2.

$$f'(a)(x-a)+f(a) = f'(2)(x-2)+f(2) = 6(x-2)+7 = 6x-12+7 = 6x-5$$

L'équation réduite de la tangente en 2 est $y=6x-5$.