❉ Chapitre 2 ❉

Polynôme du second degré

I. Les polynômes

Définition 1:

Les monômes sont des expressions algébriques formées du produit d'un coefficient a réel par une puissance (entière) d'une indéterminée X : aX^n.

Exemples de monômes : $4X^0 = 4$, $-3X^1 = -3X$, πX^2, $12{,}5X^7$ et $0X = 0$

L'exposant de X est appelé le degré du monôme.
Par exemple : $-3X$ est de degré 1, πX^2 est de degré 2, $12{,}5X^7$ est de degré 7, 4 est de degré 0 et $0X = 0$ est de degré $-\infty$.

Un polynôme est une somme (finie) de monômes.
Par exemple : $-3+8X^2+4X-7X^3-7X+10$ est un polynôme.

On dit qu'un polynôme est **réduit** lorsque tout ses monômes sont de degrés distincts. Ainsi $3X^2-12X^5+2$ est sous forme réduite mais $5+7X-14X^2+8X$ n'est pas sous forme réduite car les monômes $7X$ et $8X$ sont semblables (même degré).

Le degré d'un polynôme réduit est le plus grand degré de ses monômes.

Un polynôme réduit est dit **ordonné** lorsque ses monômes sont rangés suivant les puissances décroissantes de l'indéterminée X.
Par exemple $-7X^3+X-3$ est ordonné alors que $X-7X^2+2$ ne l'est pas.

Les polynômes ont ceci de merveilleux qu'ils peuvent s'appliquer à un très grand nombre d'objets. X peut désigner des nombres bien sûr mais aussi des polynômes, des fonctions, des transformations géométriques, des tableaux de nombres (matrices), etc.

II. Différentes expressions et lien avec la courbe représentative

1. La forme développée

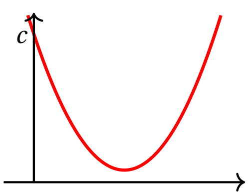
Définition 2:

Une **fonction polynôme de degré 2** est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$.
Cette écriture de $f(x)$ est appelée **forme développée** de $f(x)$.

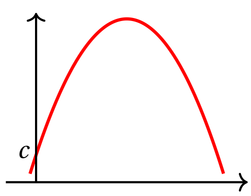
Définition 3:

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$.

- Si $a > 0$ alors la représentation graphique de f est **une parabole** $\mathscr{P}$ « tournée vers le haut ».
- Si $a < 0$ alors la représentation graphique de f est **une parabole** $\mathscr{P}$ « tournée vers le bas ».



$a > 0$



$a < 0$

Remarque :

- Le point « le plus haut » ($a<0$) ou « le plus bas » ($a>0$) est appellé le sommet de la parabole.
- L'ordonnée du point de $\mathscr{P}$ qui a pour abscisse 0 est le coefficient c.

Démonstration :

Propriété à démontrer : « L'ordonnée du point de $\mathscr{P}$ qui a pour abscisse 0 est le coefficient c » .

$$f(0) \quad = \quad a\times 0^2+b\times 0+c \quad = \quad 0+0+c \quad = \quad c$$

Donc l'ordonnée du point de $\mathscr{P}$ qui a pour abscisse 0 est bien c. ■

2. La forme canonique

Propriété 1 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ une fonction polynôme du second degré ($a\neq 0$). Il existe de nombre réels α et β tels que pour tout nombre réels x, on a

$$ax^2+bx+c \quad = \quad a(x-\alpha)^2+\beta$$

L'écriture $a(x-\alpha)^2+\beta$ est la **forme canonique** de la fonction f.

Démonstration :

Propriété à démontrer : « Il existe de nombre réels α et β tels que pour tout nombre réels x, on a $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2+\beta$ »

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] = a\left[x^2+2\times\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2+a\times\frac{c}{a} = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\frac{b^2}{4a^2}+\frac{ac}{a}\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+\frac{4ac}{4a} = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}
\end{aligned}$$

Donc $ax^2+bx+c \quad = \quad a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$. ■

Propriété 2 :

1. Le sommet de la parabole $\mathscr{P}$ a pour coordonnées $S(\alpha;\beta)$.
2. La parabole $\mathscr{P}$ a pour axe de symétrie la droite d'équation $x=\alpha$

Démonstration :

1. Propriété à démontrer : « Le sommet de la parabole $\mathscr{P}$ a pour coordonnées $S(\alpha;\beta)$. »

   Soit f la fonction polynôme de degré 2 dont la courbe représentative est $\mathscr{P}$.

   Raisonnons par disjonction des cas :

   - Avec $a>0$: $(x-\alpha)^2\geqslant 0 \iff a\times(x-\alpha)^2\geqslant 0 \iff a\times(x-\alpha)^2+\beta\geqslant\beta \iff f(x)\geqslant\beta$
     Donc β est le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Il est atteint en $x=\alpha$ ($f(\alpha)=a\times(\alpha-\alpha)^2+\beta=\beta$).
     Donc le point $S(\alpha;\beta)$ est le sommet de la parabole $\mathscr{P}$.
   - Avec $a<0$: $(x-\alpha)^2\geqslant 0 \iff a\times(x-\alpha)^2\leqslant 0 \iff a\times(x-\alpha)^2+\beta\leqslant\beta \iff f(x)\leqslant\beta$
     Donc β est le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
     Donc le point $S(\alpha;\beta)$ est le sommet de la parabole $\mathscr{P}$. ■

2. Propriété à démontrer : « La parabole $\mathscr{P}$ a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$ »

   Soit f la fonction polynôme de degré 2 dont la courbe représentative est $\mathscr{P}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et deux points M et M' d'abscisses respectives $\alpha - x$ et $\alpha + x$.

$$\begin{array}{rcl} f(\alpha - x) & = & a \times (\alpha - x - \alpha)^2 + \beta \\ & = & a \times (-x)^2 + \beta \\ & = & ax^2 + \beta \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f(\alpha + x) & = & a \times (\alpha + x - \alpha)^2 + \beta \\ & = & a \times (x)^2 + \beta \\ & = & ax^2 + \beta \end{array}$$

   Comme $f(\alpha - x) = f(\alpha + x)$, les points M et M' ont la même ordonnée, donc la droite d'équation $x = \alpha$ est un axe de symétrie pour la parabole $\mathscr{P}$. ■

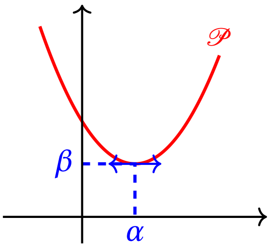
On remarque que l'on peut estimer l'allure de la courbe du trinôme $ax^2 + bx + c$ à partir de la forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$. En effet, avec la forme canonique, suivant le signe de a, on déduit que β est un minimum ou un maximum ainsi que l'orientation de la parabole.

En résumé :

Propriété 3 :

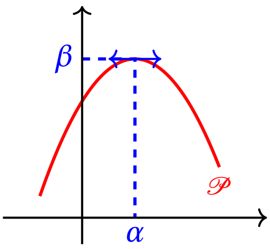
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré ($a \neq 0$). Les variations du trinôme f sont données par les tableaux suivants :

1. Si $a > 0$, la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; \alpha]$ et croissante sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.



x	$-\infty$		α		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	β	↗	$+\infty$

2. Si $a < 0$, la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty; \alpha]$ et décroissante sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.



x	$-\infty$		α		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	β	↘	$-\infty$

Démonstration :

1. Propriété à démontrer : « Si $a > 0$, la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; \alpha]$ et croissante sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$. »

   Faisons un raisonnement par disjonction des cas :

   - Sur l'intervalle $]-\infty; \alpha]$: soient $m, n \in \mathbb{R}$ tels que $m < n \leqslant \alpha$.

$$\begin{array}{rclcl} m & < & n & \leqslant & \alpha \\ m - \alpha & < & n - \alpha & \leqslant & 0 \\ (m-\alpha)^2 & > & (n-\alpha)^2 & & \text{car la fonction carrée est décroissante sur l'intervalle }]-\infty; 0] \\ a(m-\alpha)^2 & > & a(n-\alpha)^2 & & \text{car } a > 0 \\ a(m-\alpha)^2 + \beta & > & a(n-\alpha)^2 + \beta & & \\ f(m) & > & f(v) & & \end{array}$$

   Donc la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; \alpha]$.

- Sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$: soient $m, n \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha \leqslant m < n$.

$$\begin{array}{rcl} \alpha \leqslant & m & < n \\ 0 \leqslant & m-\alpha & < n-\alpha \\ & (m-\alpha)^2 & < (n-\alpha)^2 \quad \text{car la fonction carrée est croissante sur l'intervalle } [0;+\infty[\\ & a(m-\alpha)^2 & < a(n-\alpha)^2 \quad \text{car } a>0 \\ & a(m-\alpha)^2+\beta & < a(n-\alpha)^2+\beta \\ & f(m) & < f(v) \end{array}$$

Donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$. ■

2. On applique le même raisonnement pour $a < 0$. ■

3. La forme factorisée

Propriété 4 :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ est une fonction polynôme de degré 2, avec a, x_1 et x_2 des réels tels que $a \neq 0$.
Cette écriture de $f(x)$ est appelée **forme factorisée** de $f(x)$.

Démonstration :

Propriété à démontrer : « $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ est une fonction polynôme de degré 2, avec a, x_1 et x_2 des réels tels que $a \neq 0$. »

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & a(x-x_1)(x-x_2) \quad = \quad a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) \\ & = & a\left(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right) \quad = \quad ax^2 - a(x_1+x_2)x + ax_1x_2 \\ & = & ax^2+bx+c \quad \text{avec} \quad b=-a(x_1+x_2) \quad \text{et} \quad c = ax_1x_2 \end{array}$$

Donc f est bien une fonction polynôme de degré 2. ■

III. Racine et signe d'un trinôme

1. Racine d'un trinôme

Définition 4:

Les racines d'un polynôme sont les nombres réels qui annulent ce polynôme.

Propriété 5 :

x_1 et x_2 sont les seules racines du polynôme $a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $a \neq 0$.

Démonstration :

Propriété à démontrer : « x_1 et x_2 sont les seules racines de $a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $a \neq 0$. »

Existence :

$$\begin{array}{rcl} f(x_1) & = & a(x_1-x_1)(x_1-x_2) \\ & = & a \times 0 \times (x_1-x_2) \\ & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f(x_2) & = & a(x_2-x_1)(x_2-x_2) \\ & = & a \times (x_2-x_1) \times 0 \\ & = & 0 \end{array}$$

Donc x_1 et x_2 sont bien des racines du polynôme $a(x-x_1)(x-x_2)$

Unicité : Un produit est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul.

$$a = 0 \qquad\qquad \begin{array}{rcl} x-x_1 & = & 0 \\ x & = & x_1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} x-x_2 & = & 0 \\ x & = & x_2 \end{array}$$

Impossible car $a \neq 0$

x_1 et x_2 sont les seules racines de $a(x-x_1)(x-x_2)$. ■

Propriété 6 :

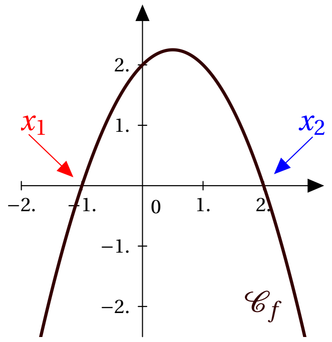
1. La somme des racines d'un polynôme de degré 2 est égale à $-\dfrac{b}{a}$
2. Le produit des racines d'un polynôme de degré 2 est égale à $\dfrac{c}{a}$

Démonstration :
Voir la démonstration dans la partie II..3. ■

2. Aspect graphique

Définition 5:
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$. Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersections entre la courbe représentative de f, noté $\mathscr{C}_f$, et l'axe des abscisses.

Exemple 1:



Prennons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + x + 2$.

Sur cet exemple, on remarque que $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points.

De plus, on observe graphiquement les solutions x_1 et x_2 de l'équation $f(x) = 0$, à savoir :

$$x_1 = -1 \text{ et } x_2 = 2$$

Les racines du polynôme $-x^2 + x + 2$ semblent être -1 et 2.

3. Signe d'un trinôme donné sous forme factorisé

Méthode 1 : *Étude de signe d'un trinôme donnée sous forme factorisée*
Pour étudier le signe d'un polynôme de degré 2 donné sous forme factorisée, il faut dresser un tableau de signe.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto -5(x-5)(x+3)$. Le tableau de signe de f est :

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
-5		$-$		$-$		$-$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Propriété 7 :
Soit f la fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $a \neq 0$.
Avec la convention $x_1 < x_2$, le tableau de signe de la fonction f est donné par :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	