❉ Chapitre 1 ❉

Probabilités conditionnelles

I. Rappel de seconde

Propriété 1 :

Soit A et B deux événements, on a les propriétés suivantes :

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exemple 1:

Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des essais sur 800 patients afin d'analyser l'efficacité de leurs tests de dépistage contre le sida. Le tableau présente les résultats de l'étude :

	(M) Séropositif	$(\overline{M})$ Séronégatif	Total
(N) Test négatif	3	441	444
$(\overline{N})$ Test positif	354	2	356
Total	357	443	800

1. On choisit au hasard un résultat et on considère les évènements suivants :
   - M : « Le patient est séropositif. »
   - N : « Le test est négatif »

   Calculons :

   a. $P(M)$ **b.** $P(\overline{M})$ **c.** $P(N)$ **d.** $P(M \cap N)$ **e.** $P(M \cup N)$

1. **a.** $P(M) = \dfrac{357}{800} = 0.44625$
   Il y a $44,625\%$ de chance qu'un patient choisi au hasard soit séropositif.

   b. $P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0.44625 = 0.55375$
   Il y a 55.375% de chance qu'un patient choisi au hasard ne soit pas séropositif.

   c. $P(N) = \dfrac{444}{800} = 0.555$
   Il y a $55,5\%$ de chance qu'un test choisi au hasard soit négatif.

   d. $P(M \cap N) = \dfrac{3}{800} = 0.00375$
   Il y a $0,375\%$ de chance que le test d'une personne soit séropositive soit négatif.

   e. $P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(M \cap N) = 0.44625 + 0.555 - 0.00375 = 0.9975$
   Il y a $99,75\%$ de chance que le test soit négatif ou que la personne soit séropositive.

II. Probabilité de B sachant A

De nombreuses situation se résument à des phrases de la forme « si … a lieu, alors la probabilité de … est de … » ou « sachant que … a lieu, alors la probabilité de … est de … »

Dans ces cas, on nous demande de calculer la probabilité d'un événement à condition qu'autres soit vérifié. On calcul donc des probabilités conditionnelles.

Définition 1:

On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. On la note $P_A(B)$. Si $p(A) \neq 0$, la probabilité de l'événement B sachant A, est égale à :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Remarque :

Si $P(B) \neq 0$, on définit de même $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, la probabilité de l'événement A sachant B réalisé.

Exemple 2:

On reprend l'exemple précédent.

2. **a.** On choisit maintenant au hasard un patient séropositif. Déterminons la probabilité que son test soit négatif.

   b. On choisit maintenant au hasard un test négatif. Déterminons la probabilité que le patient soit séropositif sachant que le test soit négatif.

Colorons un peu le tableau précédent pour faire ressortir les lignes et colonnes qui nous intéresse.

	(M) Séropositif	$(\overline{M})$ Séronégatif	Total
(N) Test négatif	3	441	444
$(\overline{N})$ Test positif	354	2	356
Total	357	443	800

2. **a.** On ne considère ici que les 357 patients séropositif. Sur ces personnes, 3 ont un test négatif.
   $P_M(N) = \frac{3}{357} \simeq 0,008403$. Sachant que le patient est séropositif, il y a $0,84\%$ de chance d'avoir un test négatif.

   b. On ne considère ici que les 444 tests négatif. Sur ces tests, 3 sont ceux de personnes séropositives.
   $P_N(M) = \frac{3}{444} \simeq 0,00675$. Sachant que le test est négatif, il y a $0,675\%$ de chance que la personne soit séropositive.

1. Probabilité de $A \cap B$

Propriété 2 :

Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ alors :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

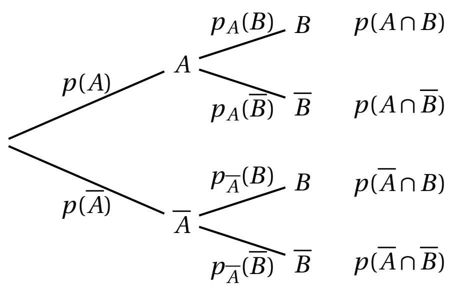
Propriété 3 :

Pour tous les événements A et B tels que $P(A) \neq 0$:

- $P_A(A) = 1$;
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$;
- Si A et B sont des événements incompatibles (c'est-à-dire ne pouvant pas se réaliser simultanément ou encore tels que $A \cap B = \emptyset$) alors $P_A(B) = 0$.

III. Utilisation d'un arbre pondéré

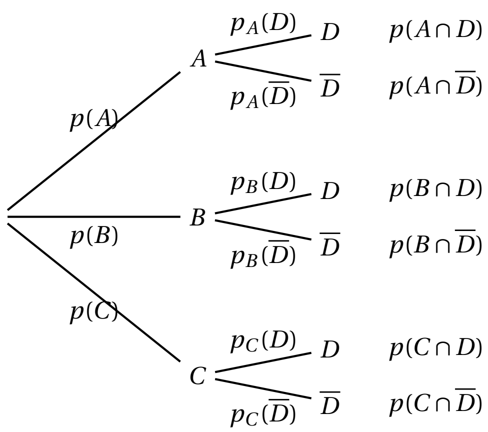
La notion de probabilité conditionnelle a déjà été rencontrée lorsqu'une situation est modélisée par un arbre.
Ainsi, en considérant deux événements A et B, l'arbre ci-contre modélise la situation :

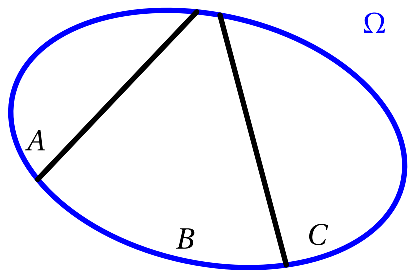


IV. Formules des probabilité totales

1. Partition de l'univers

Lorsqu'une expérience aléatoire conduit à un arbre pondéré tel que celui-ci :





alors les événements A, B et C (1^{er} niveau de branches) forment une **partition** de Ω.

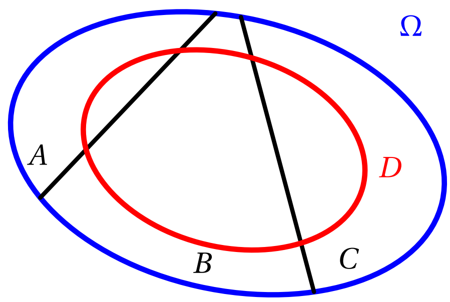
Définition 2:

Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ pour $n \geqslant 1$ des parties non vides d'un ensemble E. On dit que $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une partition de E si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$;
- pour tout $i \in 1;2;...;n$ et tout $j \in 1;2;...;n$ avec $i \neq j$, on a $A_i \cap A_j = \emptyset$

2. Probabilités totales

En reprenant l'arbre précédent peut être illustré par le diagramme suivant :



Ainsi $D = (A\cap D) \cup (B\cap D) \cup (C\cap D)$ et les événements $A\cap D$, $B\cap D$ et $C\cap D$ sont incompatibles.

Propriété 4 : *Probabilités totales*

On en déduit la formule des probabilités totales :

$$p(D) = p(A\cap D) + p(B\cap D) + p(C\cap D)$$

Qui peut encore s'écrire :

$$p(D) = p(A) \times p_A(D) + p(B) \times p_B(D) + p(C) \times p_C(D)$$