❉ Chapitre 14 ❉

Produit scalaire dans le plan

I. Approche géométrique

1. Norme d'un vecteur

Définition 1:

Soient $\vec{u}$ un vecteur et A et B deux points d'un plan tels que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ soit un représentant du vecteur $\vec{u}$. La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\left\|\vec{u}\right\|$, est égale à la longueur du segment $[AB]$.

Propriété 1 :

Soit $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ un repère orthonormé d'un plan. Dans ce repère, on considère le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x_{\vec{u}}\\ y_{\vec{u}}\end{pmatrix}$.

La norme du vecteur $\vec{u}$ est obtenue grâce a la formule :

$$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x_{\vec{u}}^{\,2}+y_{\vec{u}}^{\,2}}$$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « Dans un repère orthonormé, $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x_{\vec{u}}^{\,2}+y_{\vec{u}}^{\,2}}$ »

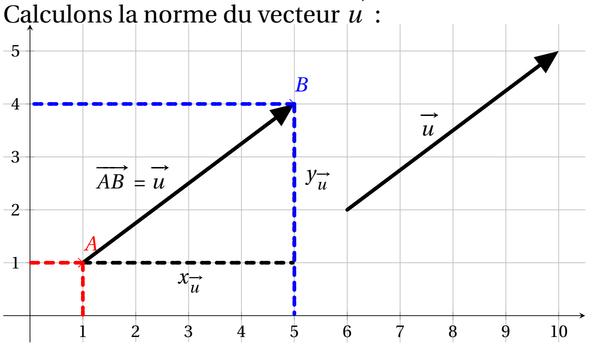
D'après la définition, la norme du vecteur $\vec{u}$ est égale à la longueur du segment $[AB]$

$$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{x_{\vec{u}}^{\,2}+y_{\vec{u}}^{\,2}} \quad \text{car } \vec{u}=\overrightarrow{AB} \text{ donc } \begin{pmatrix}x_{\vec{u}}\\ y_{\vec{u}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix}$$

Donc , dans un repère orthonormé, $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x_{\vec{u}}^{\,2}+y_{\vec{u}}^{\,2}}$ ■

Exemple 1:

Calculons la norme du vecteur $\vec{u}$:



1. Un des représentants du vecteur $\vec{u}$ est le vecteur $\overrightarrow{AB}$
2. Calcul des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   Comme $A(1;1)$ et $B(5;4)$ alors :
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-1\\ 4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 3\end{pmatrix}$. Donc $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\ 3\end{pmatrix}$
3. Calcul de la norme du vecteur $\vec{u}$:
   $$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x_{\vec{u}}^{\,2}+y_{\vec{u}}^{\,2}} = \sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$$
   La norme du vecteur $\vec{u}$ est égale à 5.

2. Produit scalaire de deux vecteurs

Définition 2:

Soients $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls d'un plan et $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ l'angle formé par ces deux vecteurs. Le produit scalaire, noté « $\vec{u}\cdot\vec{v}$ », du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$ est donné par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$$

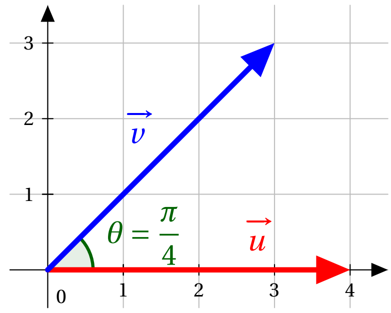
Exemple 2:

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan, calculons leur produit scalaire.

- $\|\vec{u}\| = 4$
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$
- $(\vec{u}\,,\vec{v}) = \theta = 45° = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,,\vec{v}) \\ &= 4\times 3\sqrt{2}\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 12\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 12 \end{aligned}$$

Le produit scalaire entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut 12.



3. Projection d'un vecteur

Propriété 2 :
Soient O, A et B trois points d'un plan. Si H est le projeté orthogonal de B sur (OA), alors :

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}$$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « Si H est le projeté orthogonal de B sur (OA), alors $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}$ »

On doit démontrer une implication : H est le projeté orthogonal de B sur $(OA) \Longrightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}$

Supposons que le point H est le projeté orthogonal de B sur (OA), alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HB}\right) \quad \text{d'après la relation de Chasles} \\ &= \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}+\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{HB}\right\|\times\cos\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{HB}\right) \\ &= \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}+\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{HB}\right\|\times\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}+\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{HB}\right\|\times 0 \\ &= \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH} \end{aligned}$$

Donc Si H est le projeté orthogonal de B sur (OA), alors $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}$ ∎

Dans un repère orthonormé, la propriété ci-dessus peut être ramenée à :

Propriété 3 :
Soient O, A et B trois points d'un plan. Si H est le projeté orthogonal de B sur (OA), alors :

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overline{OA}\times\overline{OH}$$

$\overline{OA}$ et $\overline{OH}$ désigne une distance algébrique (qui peut être positive ou négative en fonction du repère).

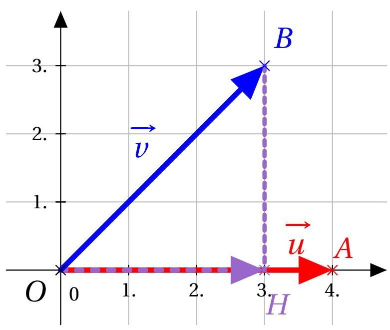
Exemple 3:

On reprend l'exemple précédent. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

1. On projette le vecteur $\overrightarrow{OB}$ sur le vecteur $\overrightarrow{OA}$
2. On détermina la norme du vecteur $\overrightarrow{OH}$ (ici, on a $\left\|\overrightarrow{OH}\right\| = 3$)
3. On utilise ensuite la propriété 3. :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overline{OA}\times\overline{OH} = 4\times 3 = 12$$

Le produit scalaire entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut 12.



II. Propriétés du produit scalaire

Propriété 4 :

$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont trois vecteurs et k est un réel.
Le produit scalaire est dit bilinéaire, c'est à dire qu'il vérifie les conditions suivantes :

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$
- $\left(k\overrightarrow{u}\right) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \left(k\overrightarrow{v}\right) = k \times \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right)$
- $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$

Démonstration :

1. Commutativité :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{v}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) &&= \left\|\overrightarrow{v}\right\| \times \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \cos\left(-\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\right)\right) \\ &= \left\|\overrightarrow{v}\right\| \times \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\right) &&= \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

■

2. Linéarité : Montrons que $\left(k\overrightarrow{u}\right) \cdot \overrightarrow{v} = k \times \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right)$. Pour cela, procédons par disjonction des cas :

• Si $k > 0$:
$$\begin{aligned} \left(k\overrightarrow{u}\right) \cdot \overrightarrow{v} &= \left\|k\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{v}\right\| \times \cos\left(k\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) &&= k \times \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{v}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \\ &= k \times \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right) \end{aligned}$$

• Si $k < 0$:
$$\begin{aligned} \left(k\overrightarrow{u}\right) \cdot \overrightarrow{v} &= \left\|k\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{v}\right\| \times \cos\left(k\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) &&= -k \times \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{v}\right\| \times \left(-\cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)\right) \\ &= k \times \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{v}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) &&= k \times \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right) \end{aligned}$$

On utilisera la même méthode pour montrer que $\overrightarrow{u} \cdot \left(k\overrightarrow{v}\right) = k \times \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right)$ ■

3. Distributivité : Cette propriété est admise. ■

III. Approche analytique

1. Produit scalaire et coordonnées de vecteurs

On se place dans un repère **orthonormé** du plan $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$.

Propriété 5 :

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{u}} \\ y_{\overrightarrow{u}} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{v}} \\ y_{\overrightarrow{v}} \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan, le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ est le nombre réel défini par :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x_{\overrightarrow{u}} x_{\overrightarrow{v}} + y_{\overrightarrow{u}} y_{\overrightarrow{v}}$$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x_{\overrightarrow{u}} x_{\overrightarrow{v}} + y_{\overrightarrow{u}} y_{\overrightarrow{v}}$ ».

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= \left(x_{\overrightarrow{u}} \times \overrightarrow{i} + y_{\overrightarrow{u}} \times \overrightarrow{j}\right) \cdot \left(x_{\overrightarrow{v}} \times \overrightarrow{i} + y_{\overrightarrow{v}} \times \overrightarrow{j}\right) \\ &= \left(x_{\overrightarrow{u}} \times \overrightarrow{i}\right) \cdot \left(x_{\overrightarrow{v}} \times \overrightarrow{i}\right) + \left(x_{\overrightarrow{u}} \times \overrightarrow{i}\right) \cdot \left(y_{\overrightarrow{v}} \times \overrightarrow{j}\right) + \left(y_{\overrightarrow{u}} \times \overrightarrow{j}\right) \cdot \left(x_{\overrightarrow{v}} \times \overrightarrow{i}\right) + \left(y_{\overrightarrow{u}} \times \overrightarrow{j}\right) \cdot \left(y_{\overrightarrow{v}} \times \overrightarrow{j}\right) \\ &= x_{\overrightarrow{u}} \times x_{\overrightarrow{v}} \times \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} + x_{\overrightarrow{u}} \times y_{\overrightarrow{v}} \times \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} + y_{\overrightarrow{u}} \times x_{\overrightarrow{v}} \times \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{i} + y_{\overrightarrow{u}} \times y_{\overrightarrow{v}} \times \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} \\ &= x_{\overrightarrow{u}} \times x_{\overrightarrow{v}} \times ||\overrightarrow{i}||^2 + x_{\overrightarrow{u}} \times y_{\overrightarrow{v}} \times 0 + y_{\overrightarrow{u}} \times x_{\overrightarrow{v}} \times 0 + y_{\overrightarrow{u}} \times y_{\overrightarrow{v}} \times ||\overrightarrow{j}||^2 \\ &= x_{\overrightarrow{u}} \times x_{\overrightarrow{v}} \times 1 + y_{\overrightarrow{u}} \times y_{\overrightarrow{v}} \times 1 \quad = \quad x_{\overrightarrow{u}} x_{\overrightarrow{v}} + y_{\overrightarrow{u}} y_{\overrightarrow{v}} \end{aligned}$$

■

Exemple 4:

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan, calculons leur produit scalaire :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = x_{\vec{u}}x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}}y_{\vec{v}} = 1\times 3 + 1\times 2 = 5$$

Le produit scalaire entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut 5.

Remarque :

- $\vec{u}\cdot\vec{u} = x_{\vec{u}}^2 + y_{\vec{u}}^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2$, on notera parfois $||\vec{u}||^2 = \vec{u}^2$
- Si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, alors le produit scalaire est nul
- La réciproque est fausse : $\vec{u}.\vec{v} = 0$ n'implique pas nécessairement $\vec{u} = 0$ ou $\vec{v} = 0$

2. Produit scalaire et orthogonalité

Définition 3:

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont dits orthogonaux si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires

Propriété 6 :

Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$\vec{u}\perp\vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « $\vec{u}\perp\vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ »

On doit démontrer une équivalence. Pour ce faire, nous allons démontrer l'implication puis la réciproque :

- Implication ($\Rightarrow$) : On suppose que les deux vecteurs, non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

$$(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{2} \iff \cos(\vec{u},\vec{v}) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \iff \left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\cos(\vec{u},\vec{v}) = 0 \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

Donc le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul.

- Réciproque ($\Leftarrow$) : On suppose que le produit scalaire des deux vecteurs, non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\cos(\vec{u},\vec{v}) = 0$$

Un produit de facteur est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul.

$\left\|\vec{u}\right\| = 0$ $\vec{u} = 0$ Impossible car $\vec{u}\neq\vec{0}$.	$\left\|\vec{v}\right\| = 0$ $\vec{v} = 0$ Impossible car $\vec{v}\neq\vec{0}$.	$\cos(\vec{u},\vec{v}) = 0$ $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $(\vec{u},\vec{v}) = -\frac{\pi}{2}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

On vient de démontrer l'implication puis la réciproque donc l'équivalence est vraie : $\vec{u}\perp\vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ ■

Exemple 5:

On considère les trois vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$. Ces vecteurs sont-ils orthogonaux?

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = x_{\vec{u}}x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}}y_{\vec{v}} = 3\times(-1) + 2\times\frac{3}{2} = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux
- $\vec{u}\cdot\vec{w} = x_{\vec{u}}x_{\vec{w}} + y_{\vec{u}}y_{\vec{w}} = 3\times 0 + 2\times(-1) = -2$ donc $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas orthogonaux