❉ Chapitre 7 ❉

Signe d'une fonction polynôme du second degré

I. Factorisation d'un trinôme

Propriété 1 :

On considère un trinôme du second degré ax^2+bx+c.

- Si $\Delta<0$, on sait que le trinôme n'a pas de racine réelle. Il n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta=0$, on sait que le trinôme a une racine double : $x_0=-\dfrac{b}{2a}$.
  Pour tout réel x, $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$.
- Si $\Delta>0$, on sait que le trinôme a deux racines : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
  Pour tout réel x, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Démonstration :

On sait que $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$ (Forme canonique du trinôme).

On raisonne par disjonction des cas :

1. Dans le cas ou $\Delta=0$:

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{0}{4a^2}\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = a(x-x_0)^2$$

2. Dans le cas ou $\Delta>0$:

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}^{\,2}\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right)\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]\\
&= a(x-x_1)(x-x_2)
\end{aligned}$$

■

Exemple 1:

Soit f la fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2+x-3$.

Ici, $a=2$, $\Delta=25$, $x_1=-\dfrac{3}{2}$ et $x_2=1$ donc pour tout réel x, on a :

$$f(x)=2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)$$

II. Signe du trinôme et inéquations

On utilise les notations précédentes sauf que x_1 et x_2 désignent ici respectivement le plus petit et le plus grand des deux nombres $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Propriété 2 :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ et Δ son discriminant associé.

- Si $\Delta < 0$,

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	

- Si $\Delta = 0$,

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de a	

- Si $\Delta > 0$,

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de -a	0	signe de a	

Méthode 1 : *Établir le tableau de signe d'une fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$*

Construisons le tableau de signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 6x + 45$

1. Identifier les coefficients a, b et c. Attention aux signes de ces quantités !
   $a = -3$, $b = 6$ et $c = 45$
2. Déterminer les racines éventuelles de f.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-3) \times 45 = 576$$

   Δ est positif dans l'équation $f(x) = 0$ à 2 solutions.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-\sqrt{576}}{2\times(-3)} = 5 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+\sqrt{576}}{2\times(-3)} = -3$$

3. Déterminer le signe de a et la plus grande des deux valeurs x_1 et x_2.
   - $a = -3$ donc a est négatif (signe « - »).
   - $x_1 = 5$ et $x_2 = -3$ donc x_2 est plus petit que x_1.
4. Utiliser la propriété ci-dessus pour construire le tableau de signe, en remplaçant par les valeurs de a, x_1 et x_2 :

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	-	

Remarque :

Déterminer le signe d'un trinôme permet de résoudre une inéquation du second degré.

Exemple 2:

On cherche à résoudre l'inéquation $-3x^2 + 6x + 45 < 0$.

On connait le tableau de signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 6x + 45$. *voir ci-dessus*
On regarde quand la fonction est négative donc les signes "-" dans le tableau de signes.

Donc $-3x^2 + 6x + 45 < 0$ si : $x \in]-\infty; -3[\cup]5; +\infty[$