❈ Chapitre 18 ❈

Somme des termes d'une suite

I. Somme des termes d'une suite arithmétique

Propriété 1 :

Pour tout entier naturel n non nul,

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration :

Soit $S=1+2+\cdots+n$. On a aussi $S=n+(n-1)+\cdots+1$. Donc $2S=(n+1)+(n-1+2)+\cdots+(n+1)=(n+1)\times n$

D'où $S=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ■

Exemple 1:

Calculons la somme S de tous les entiers naturel de 28 à 154 :

$$S = 28+29+\cdots+154 = 1+2+\cdots+154-(1+2+\cdots+28) = \frac{154(154+1)}{2}-\frac{28(28+1)}{2} = 12341$$

Méthode 1 : *Calcul de la somme des termes d'une suite arithmétique*

Calculons une somme de termes de la suite arithmétique de raison $0,5$ et de premier terme 12 : $12+12,5+\cdots+42,5$

1. On simplifie la somme en faisant apparaitre $1+2+3+\cdots+n$:

$$12+12,5+\cdots+42,5 = (12+0,5\times 0)+(12+0,5\times 1)+\cdots+(12+0,5\times 61)$$

2. On compte correctement le nombre de terme et on factorise par la raison :

$$\begin{aligned}12+12,5+\cdots+42,5 &= (12+0,5\times 0)+(12+0,5\times 1)+\cdots+(12+0,5\times 61)\\ &= 12\times 62+0,5\times(0+1+2+\cdots+61)\end{aligned}$$

3. On utilise la propriété 1 :

$$\begin{aligned}12+12,5+\cdots+42,5 &= (12+0,5\times 0)+(12+0,5\times 1)+\cdots+(12+0,5\times 61)\\ &= 12\times 62+0,5\times(0+1+2+\cdots+61)\\ &= 12\times 62+0,5\times\frac{61(61+1)}{2} = 1689,5\end{aligned}$$

II. Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété 2 :

Pour tout entier naturel n non nul, si $q\neq 1$ alors :

$$1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Démonstration :

Soit $S=1+q+q^2+\cdots+q^n$. On a aussi $q\times S=q+q^2+q^3\cdots+q^{n+1}$. Donc $S-qS=1+q+q^2+\cdots+q^n-\left(q^2+q^3\cdots+q^{n+1}\right)$

D'où $(1-q)S=1-q^{n+1}$. Finalement $S=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ car $q\neq 1$. ■

Remarque :

Si $q=1$ alors $1+q+q^2+\cdots+q^n=1+1+1+\cdots+1=n+1$.

Exemple 2:

$S=1+2+4+\cdots+2^{10}=\dfrac{1-2^{11}}{1-2}=2^{11}-1=2047$