❊ Chapitre 12 ❊

Suites arithmétiques

I. Définition d'une suite arithmétique

1. Définition par récurrence

Définition 1:

Une suite est dite **arithmétique** lorsqu'on passe d'un terme au suivant en ajoutant à chaque fois un même nombre r appelé **raison** de la suite.
Une suite arithmétique est définie par la donnée de son premier terme (généralement u_0 ou u_1) et la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = k & \text{avec } k \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

Exemple 1:

Une chaîne de supermarché avait 200 points de vente en 2010. Chaque année elle en a ouvert 6 de plus.
On note u_n le nombre de points de vente de la chaîne au bout de n année.
Le premier terme de la suite (u_n) est $u_0 = 200$.
On passe d'un terme au suivant en ajoutant 6, c'est-à-dire : $u_{n+1} = u_n + 6$.
(u_n) est donc une suite arithmétique de raison 6.

Méthode 1 :

Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, on calcule la différence entre deux termes consécutifs. Si cette différence est constante, quelles que soient les valeurs de n, c'est a dire que sa valeur ne dépend pas de n, on peut en conclure que la suite (u_n) est arithmétique.

Exemple 2:

Soit la suite (w_n) définie par $w_n = 3n + 7$ pour tout entier naturel n.

$$w_{n+1} - w_n = 3 \times (n+1) + 7 - (3n+7) = 3n + 3 + 7 - 3n - 7 = 3$$

Donc (w_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$et de premier terme $w_0 = 7$.

2. Définition explicite

Propriété 1 :

Soit(u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

- Pour tout entier naturel$n$, on a : $u_n = u_0 + n \times r$
- Pour tout entiers naturels n et p, on a : $u_n = u_p + (n - p) \times r$

Démonstration :

- Si (u_n) est arithmétique de raison r, pour passer de u_0 à u_n, on ajoute n fois la raison donc $u_n = u_0 + n \times r$.
- Pour tout entiers naturels n et p, on a :$u_n = u_0 + n \times r$ et $u_p = u_0 + p \times r$.

$$\begin{aligned} u_n - u_p &= u_0 + n \times r - (u_0 + p \times r) = u_0 + n \times r - u_0 - p \times r = (n-p) \times r \\ u_n &= u_p + (n-p) \times r \end{aligned}$$

Exemple 3:

Soit(u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ telle que $u_5 = 7$ et $u_9 = 19$.

1. Déterminons la raison de cette suite.
   $u_9 = u_5 + (9-5) \times r$, donc $r = \dfrac{u_9 - u_5}{9-5} = 3$.
2. Déterminons le premier terme de cette suite.
   $u_9 = u_0 + 9 \times r$, donc $u_0 = 7 - 5 \times 3 = -8$.

On en déduit donc que cette suite a pour terme général $u_n = -8 + 3n$

II. Propriétés des suites arithmétiques

1. Sens de variation

Propriété 2 :
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r alors :

- Si $r > 0$ alors (u_n) est **strictement croissante.**
- Si $r = 0$ alors (u_n) est **constante.**
- Si $r < 0$ alors (u_n) est **strictement décroissante.**

Démonstration :
On considère une suite arithmétique de raison r. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + r \iff u_{n+1} - u_n = r$.
On observe trois cas possible :

- Si $r > 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.
- Si $r = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0$ donc (u_n) est constante.
- Si $r < 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$ donc (u_n) est strictement décroissante.

Exemple 4:
Soit la suite (w_n) définie par $w_n = 3n + 7$ pour tout entier naturel n.
On a vu ci-dessus que (w_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$.
Donc (w_n) est une suite strictement croissante car $r > 0$

On peut retrouver ce résultat grâce à la définition du sens de variation :

$$w_{n+1} - w_n \quad = \quad 3 \times (n+1) + 7 - (3n+7) \quad = \quad 3n + 3 + 7 - 3n - 7 \quad = \quad 3 > 0$$

Donc (w_n) est une suite arithmétique croissante.

2. Représentation graphique

Propriété 3 :
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, alors les points de sa représentation graphique dans un repère du plan sont alignés.

Démonstration :
Soit (u_n) une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$.
On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ avec la fonction $f : x \mapsto u_0 + r \times x$.
Cette fonction est une fonction affine dont sa représentation graphique est une droite. Les points de la suite (u_n) appartiennent à cette droite donc ils sont alignés.

Exemple 5:

Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 350$ et la relation de récurrence $v_{n+1} = v_n - 50$, pour tout entier naturel n. On calcul les premiers termes de cette suite :

n	0	1	2	3	4	5
v_n	350	300	250	200	150	100

Sur le graphique ci dessous, les points B_n correspondent à la suite (v_n).
On voit que les points représentant la suite (v_n) sont alignés. Cette suite semble donc arithmétique de raison $r = -50$.