❉ Chapitre 15 ❉

Suites géométriques

I. Définition d'une suite géométrique

1. Définition par récurrence

Définition 1:

Une suite est dite **géométrique** lorsqu'on passe d'un terme au suivant en multipliant à chaque fois un même nombre q appelé **raison** de la suite.

Une suite géométrique est définie par la donnée de son premier terme (généralement u_0 ou u_1) et la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = k \text{ avec } k \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n \times q \end{cases}$$

Exemple 1:

Au 1er janvier 2018, Bruno place un capital de 1500 €à intérêts composés sur un livret au taux de 2% par an. On note u_n le capital sur le compte au 1er janvier $(2008+n)$.
Le premier terme de la suite (u_n) est $u_0 = 1500$.
On passe d'un terme au suivant en multipliant par $1,02$, c'est-à-dire : $u_{n+1} = u_n \times 1,02$.
(u_n) est donc une suite géométrique de raison $1,02$.

Méthode 1 :

Pour démontrer qu'une suite est géométrique, on calcule le rapport entre deux termes consécutifs : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$
Si ce rapport est constant, quelles que soient les valeurs de n, c'est à dire que sa valeur ne dépend pas de n, on peut en conclure que la suite (u_n) est géométrique.

Exemple 2:

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$ pour tout entier naturel n.

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{n+1}}{2^n} = \dfrac{2^n \times 2^1}{2^n} = 2.$ Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$.

2. Expression explicite d'une suite géométrique

Propriété 1 :

Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

- pour tous $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0 \times q^n$
- pour tous n et p de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Démonstration :

- Si (u_n) est géométrique de raison q, pour passer de u_0 à u_n, on multiplie n fois par la raison, c'est à dire :

$$u_n = u_0 \times \underbrace{q \times q \times \cdots \times q}_{n \text{ fois}} = u_0 \times q^n$$

- Pour tous n et p de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0 \times q^n$ et $u_p = u_0 \times q^p$

$$\frac{u_n}{u_p} = \frac{u_0 \times q^n}{u_0 \times q^p} = \frac{q^n}{q^p} = q^{n-p} \iff u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Exemple 3:

Considérons la suite géométrique (u_n) définies pour $n \in \mathbb{N}$ de raison q et telle que $u_4 = 8$ et $u_7 = 512$.

1. Commençons par déterminer la raison de cette suite :
   On a $u_7 = u_4 \times q^{7-4}$, d'où $q^3 = \dfrac{u_7}{u_4} = \dfrac{512}{84} = 64$
   Donc $q = \sqrt[3]{64} = 4$.
2. Ensuite calculons le premier terme de cette suite :
   On a $u_4 = u_0 \times q^4$
   Donc $u_0 = \dfrac{u_4}{q^4} = \dfrac{8}{4^4} = \dfrac{1}{32}$.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{32} \times 4^n$.

II. Propriétés des suites géométriques

1. Sens de variation de la suite (q^n)

Propriété 2 :

Soit (u_n) une suite de terme général $u_n = q^n$ alors :

- Si $q < 0$ alors (u_n) **n'est pas monotone.**
- Si $q = 0$ ou $q = 1$ alors (u_n) est **constante.**
- Si $0 < q < 1$ alors (u_n) est **strictement décroissante.**
- Si $q > 1$ alors (u_n) est **strictement croissante.**

Démonstration :

On pourra raisonner par disjonction des cas puis revenir à la définition du sens de variation d'une suite.

Exemple 4:

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$, pour tout entier naturel n. On sait que (u_n) est une suite de terme général q^n avec $q = 2 > 1$ donc c'est une suite croissante.

2. Sens de variation d'une suite géométrique

Propriété 3 :

On considère (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

- Si u_0 est positive, la suite (u_n) à la même sens de variation que la suite (q^n).
- Si u_0 est négatif, le sens de variation de la suite (u_n) est le contraire de celui de la suite (q^n).

Démonstration :

On pourra remarquer que multiplier par un nombre négatif change le signe des inégalités et arriver à la conclusion.

Exemple 5:

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = -4$.
D'après l'exemple précédent, on sait que la suite de terme générale 2^n est croissante. De plus le premier terme de la suite u est négatif. On peut donc en conclure que la suite (u_n) est décroissante.

3. Représentation graphique

Exemple 6:

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$, pour tout entier naturel n. On calcul les premiers termes de cette suite :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	1	2	4	8	16	32

Sur le graphique ci dessous, les points A_n correspondent à la suite (u_n).
Une suite géométrique est représentée par des points qui suivent une évolution exponentielle.