❆ Chapitre 9 ❆

Suites numériques

I. Notion de suite numérique

Définition 1:

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Une suite numérique u est une fonction définie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour chaque $n \geqslant n_0$, on associe le nombre noté $u(n)$ ou encore u_n. La suite est notée $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ ou, plus simplement, (u_n).
Ainsi, une suite est une liste de nombres, rangés dans un certain ordre, qui se poursuit.

Rang		Terme	Notation indicielle
0	$\longmapsto$	$u(0)$	u_0
1	$\longmapsto$	$u(1)$	u_1
$\vdots$		$\vdots$	
$n-1$	$\longmapsto$	$u(n-1)$	u_{n-1}
n	$\longmapsto$	$u(n)$	u_n
$n+1$	$\longmapsto$	$u(n+1)$	u_{n+1}
$\vdots$		$\vdots$	

Vocabulaire :

- u_n est le terme général de la suite.
- u_{n-1} est le terme qui précède u_n.
- u_{n+1} est le terme qui suit u_n.
- On dit que u_n est la notation indicielle de $u(n)$(n est en indice).
- On note la suite en mettant des parenthèses (u_n).

Remarque :

On commence d'habitude par u_0, mais parfois aussi par u_1.
u_n est le n-ième terme si on commence par u_1, mais le $(n+1)$-ième si on commence par u_0. (On décale tous les indices de 1)

II. Mode de génération d'une suite

1. Relation explicite

Définition 2:

Une suite est définie explicitement lorsque l'on peut calculer n'importe quel terme de la suite directement en fonction de n. On donne alors l'expression du terme général u_n en fonction de n. Il existe une fonction f tel que $u_n = f(n)$

Exemple 1:

Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = n^2 + 5n - 1$.
On a $u_n = f(n)$, avec $f(x) = x^2 + 5x - 1$.

$$\begin{array}{lllllll}
u_0 & = & f(0) & = & 0^2+5\times 0-1 & = & -1 \\
u_1 & = & f(1) & = & 1^2+5\times 1-1 & = & 5 \\
\dots & & & & & & \\
u_{100} & = & f(100) & = & 100^2+5\times 100-1 & = & 10499
\end{array}$$

2. Relation par récurrence

Définition 3:

Une suite est définie par récurrence lorsqu'elle est définie par la donnée de son premier terme et d'une relation qui permet de calculer un terme à partir du terme précédent. On donne donc l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n. Cette relation est appelée relation de récurrence.

Exemple 2:

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 3 \times u_n + 1$, pour tout entier naturel n.

Connaissant u_0, on peut calculer u_1 :

$$u_1 = 3 \times u_0 + 1 = 3 \times 1 + 1 = 4$$

Puis, à partir de u_1, on calcule u_2 :

$$u_2 = 3 \times u_1 + 1 = 3 \times 4 + 1 = 13$$

Puis u_3, u_4, ...

Remarque :

Pour calculer les termes "éloignés" d'une suite, utiliser la relation de récurrence peut se révéler très long. On utilise généralement un tableur ou la calculatrice pour trouver ces valeurs.

III. Représentation graphique

Définition 4:

Dans un repère du plan, la représentation graphique d'une suite (u_n) est l'ensemble des points A_n de coordonnées $(n; u(n))$ où $(n; u_n)$ avec n qui décrit les entiers naturels.

Exemple 3:

1. Soit la suite (u_n) définie par $u(0) = 1$ et la relation de récurrence $u(n+1) = 3 \times u(n) + 1$, pour tout entier naturel n.
   On calcul les premiers termes de cette suite :

n	0	1	2	3	4	5
$u(n)$	1	4	13	40	121	364

2. Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 350$ et la relation de récurrence $v_{n+1} = vn - 50$, pour tout entier naturel n.
   On calcul les premiers termes de cette suite :

n	0	1	2	3	4	5
v_n	350	300	250	200	150	100

Sur le graphique ci-contre, les points A_n correspondent à la suite (u_n) et les points B_n correspondent à la suite (v_n)