❄ Chapitre 13 ❄

Variables aléatoires

I. Variables aléatoires réelles

1. Notions de variables aléatoire réelle

Définition 1:
Soit Ω l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire (Ω est l'univers). Une variable aléatoire sur Ω est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1:
Soit l'expérience aléatoire : « On lance un dé à six faces et on regarde le résultat ». L'ensemble de toutes les issues possibles, l'univers, est $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.

Définition 2:
Soient X une variable aléatoire définie sur Ω et x un réel.

1. L'évènement « X prend la valeur x » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe le réel x.
2. L'évènement « X prend des valeurs supérieurs ou égales à x » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe un réel supérieur ou égal à x.
3. L'évènement « X prend des valeurs inférieures ou égales à x » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe un réel inférieures ou égal à x.

Exemple 2:
On considère le jeu suivant : « On lance un dé à six faces et on regarde le résultat ».

- Si le résultat est pair, on gagne 2€.
- Si le résultat est 1, on gagne 3€.
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4€.

On peut définir ainsi une variable aléatoire X sur $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$ qui peut prendre les valeurs 2, 3 ou -4.

- $\{X = 2\}$ est réalisé lorsque l'on obtient les valeurs 2, 4 et 6.
- $\{X \leqslant 2\}$ est réalisé lorsque le dé affiche les valeurs 2, 3, 4, 5 et 6.
- $\{X \geqslant -4\}$ est réalisé pour toutes les valeurs (c'est un évènement certain).

2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

Définition 3:
Soit X une variable aléatoire sur Ωprenant les valeurs x_1, x_2, x_3, ... x_n.
Lorsqu'à chaque valeur x_i, on associe la probabilité $p_i = p\,(X = x_i)$, on définit la loi de probabilité de X.
On présente souvent la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau.

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Les probabilités obtenues sont telles que : $p_1 + p_2 + \ldots p_n = 1$.

Exemple 3:

On considère la variable aléatoire X définie dans l'exemple précédent. Chaque issue du lancer de dé est équiprobable.

La probabilité que la variable aléatoire prenne la valeur 2 est égale à $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$. On note : $P(X=2)=\frac{1}{2}$.

De même : $P(X=3)=\frac{1}{6}$ et $P(X=-4)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

On peut résumer les résultats dans un tableau :

Ce tableau résume la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

x_i	-4	2	4	Total
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

Méthode 1 : *Déterminer une loi de probabilité*

Soit l'expérience aléatoire : « On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. »

On considère le jeu suivant :

- Si on tire un cœur, on gagne 2€.
- Si on tire un roi, on gagne 5€.
- Si on tire une autre carte, on perd 1€.

On appelle X la variable aléatoire qui à une carte tirée associe un gain ou une perte.

1. Déterminons la loi de probabilité de X.
   La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 2, 5, -1 mais aussi 7.
   En effet, si on tire le roi de cœur, on gagne 5(roi)+2(cœur) = 7€.
   - Si la carte tirée est un cœur (autre que le roi de cœur), $X=2$ et $P(X=2)=\frac{7}{32}$.
   - Si la carte tirée est un roi (autre que le roi de cœur),$X=5$ et $P(X=5)=\frac{3}{32}$.
   - Si la carte tirée est le roi de cœur, $X=7$ et $P(X=7)=\frac{1}{32}$.
   - Si la carte tirée n'est ni un cœur, ni un roi, $X=-1$ et $P(X=-1)=\frac{21}{32}$.

   La loi de probabilité de X est :

x_i	-1	2	5	7	Total
$P(X=x_i)$	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

2. Calculons $P(X\geqslant 5)$ et interprétons le résultat.
   $P(X\geqslant 5)=P(X=5)+P(X=7)=\frac{3}{32}+\frac{1}{32}=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$. La probabilité de gagner plus de 5€ est égale à $\frac{1}{8}$.

II. Espérance, variance et écart-type

1. Espérance d'une variable aléatoire réelle

Définition 4:

L'espérance mathématique de la loi de probabilité de X est :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n$$

Méthode 2 : *Déterminer l'espérance d'une variable aléatoire réelle*

Reprenons l'expérience vu précédemment et calculons son espérance :

$$E(X) \quad = \quad p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+p_4x_4 \quad = \quad \frac{21}{32}\times(-1)+\frac{7}{32}\times 2+\frac{3}{32}\times 5+\frac{1}{32}\times 7 \quad = \quad \frac{15}{32}$$

L'espérance est égale à $\frac{15}{32} \simeq 0,5$ signifie qu'en jouant un très grand nombre de fois, on peut espérer gagner en moyenne $0,50$€par partie.

Propriété 1 : *Linéarité de l'espérance*

Soit X un variable aléatoire et soient a et b des réels. Alors :

$$E(aX+b) = a\times E(X)+b$$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « $E(aX+b) = a\times E(X)+b$ ».

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i+b) \quad = \quad ap_1x_1+bp_1+ap_2x_2+bp_2+\cdots+ap_nx_n+bp_n \\ &= a(p_1x_1+p_2x_2+p_nx_n)+b(p_1+p_2+\cdots+p_n) \quad = \quad a\times E(X)+b \end{aligned}$$

On en déduit que l'espérance est bien linéaire. ■

2. Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

Définition 5:

- La variance de X est le réel positif, noté $Var(X)$,défini par :

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i\left(x_i-E(X)\right)^2 = p_1\left(x_1-E(X)\right)^2+p_2\left(x_2-E(X)\right)^2+\cdots+p_n\left(x_n-E(X)\right)^2$$

- L'écart-type de Xest le nombre positif, noté $\sigma(X)$, définie par $\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}$

Méthode 3 : *Déterminer la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire réelle*

Reprenons l'expérience vu précédemment et calculons sa variance :

$$Var(X) = p_1\left(x_1-E(X)\right)^2+p_2\left(x_2-E(X)\right)^2+p_3\left(x_3-E(X)\right)^2+p_4\left(x_4-E(X)\right)^2 = \frac{1}{6}\left(-2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(4-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$$

La variance est égale à $\frac{17}{4}$. On en déduit la valeur de l'écart-type : $\sigma=\sqrt{Var(X)}=\sqrt{\frac{17}{4}}=\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Propriété 2 :

Soit X un variable aléatoire et soient a et b des réels. Alors :

$$Var(aX+b) = a^2\times Var(X)$$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « $Var(aX+b) = a^2\times Var(X)$ ».

$$\begin{aligned} Var(aX+b) &= \sum_{i=1}^{n} p_i\left(ax_i+b-E(aX+b)\right)^2 \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} p_i\left(ax_i+b-(aE(X)+b)\right)^2 \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} p_i\left(ax_i+b-aE(X)-b\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i\left(a(x_i-E(X))\right)^2 \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} p_i\times a^2\left(x_i-E(X)\right)^2 \quad = \quad a^2\sum_{i=1}^{n} p_i\times\left(x_i-E(X)\right)^2 \quad = \quad a^2\times Var(X) \end{aligned}$$