Application du produit scalaire

Calculer un angle

Exercice 1 On donne $\left\|\vec{u}\right\| = 2$, $\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{3}$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = \sqrt{6}$. Donner une valeur en degrés de l'angle entre les deux vecteurs.

Exercice 2 Déterminer une valeur en degrés, arrondie à $0,1°$près, de l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{6}$, $\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{2}$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 5$

Exercice 3 Dans chacun des cas suivants, calculer AB et AC puis $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et en déduire une valeur approchée à $0,1°$près de l'angle $\widehat{BAC}$.

1. Pour les points $A(-2;-2)$, $B(3;1)$ et $C(-1;2)$.
2. Pour les points $A(1;3)$, $B(0;-2)$ et $C(1;-2)$.

Exercice 4 On considère les points $A(2;2)$ et $B(3;0)$. Déterminer une valeur en degré de l'angle $\widehat{BOA}$

Utiliser des propriétés algébriques

Exercice 5 Soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux et tels que $\left\|\vec{u}\right\| = a$ et $\left\|\vec{v}\right\| = b$. Exprimer en fonction de a et b les produits scalaires suivants.

1. $\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})$
2. $(2\vec{u}-3\vec{v})\cdot\vec{v}$
3. $(\vec{u}+\vec{v})^2$

Exercice 6 Soit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\left\|\vec{u}\right\| = \left\|\vec{w}\right\| = a$ et $\vec{v} = 3\vec{u}$. Exprimer en fonction de a et b les produits scalaires suivants.

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}$
2. $\vec{v}\cdot(\vec{u}+\vec{w})$
3. $(\vec{u}+\vec{v})^2$
4. $(\vec{v}+\vec{w})\cdot(\vec{u}+\vec{w})$

Exercice 7 A, B, C et D étant des points quelconques du plan, montrer les égalités suivantes.

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DC}$
2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ED}$
3. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

Utiliser la formule d'Al-Kashi

Exercice 8 On considère les points A, B, C tels que $AB = 3$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 120°$. Déterminer la longueur BC.

Exercice 9 On considère les points M, N, P tels que $MN = 5$, $NP = 7$ et $\widehat{MNP} = 61°$. Déterminer la longueur MP.

Exercice 10 Soit un triangle EFG tel que $EF = 7$, $FG = 6$ et $EG = 11$. Déterminer la valeur en degré et arrondie à $0,1°$de l'angle $\widehat{EFG}$.

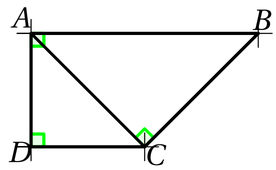
Exercice 11 Soit un triangle EDF tel que $EF = 5$, $DF = 8$ et $ED = 9$. Déterminer la valeur en degré et arrondie à $0,1°$de l'angle $\widehat{EDF}$.

Introduire le bon point à l'aide de la relation de Chasles

Exercice 12 On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 7$ et $AD = 3$. Les points H et K sont les projetés orthogonaux respectivement des points A et C sur la diagonale (BD).

1. Faire une figure.
2. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$ en fonction de HK, en utilisant la projection.
3. En utilisant $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$, calculer autrement ce même produit scalaire.
4. En déduire la valeur exact de la longueur HK.

Exercice 13



On considère le trapèze rectangle $ABCD$ tel que la diagonale $[AC]$ es perpendiculaire au coté $[BC]$. En calculant de deux manière différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, démontrer que $AC^2 = AB \times CD$.

Exercice 14 *Algorithme et Python*

Que fait l'algorithme suivant :

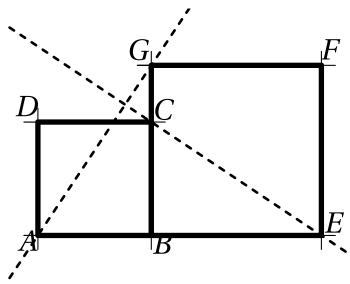
```
xu=float(input("xu="))
yu=float(input("yu="))
xv=float(input("xv="))
yv=float(input("yv="))
p=xu*xv+yu*yv
print("p=",p)
```

Exercice 15 Dans un carré $ABCD$ de coté 6, on construit le milieu I du segment $[AB]$ et les points J et K tels que : $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$

1. Calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{KJ}\cdot\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{KJ}\cdot\overrightarrow{DA}$
2. En déduire que les droites (DI) et (JK) sont perpendiculaires.

Exercice 16 On considère deux carrés $ABCD$ et $BEFG$ disposés comme sur la figure ci-contre tel que $AB = 1$ et $BE = a$.

1. Avec des coordonnées
   - **a.** Dans le repère $(A;B;D)$, donner les coordonnées de tous les points de la figure.
   - **b.** Démontrer que les droites (AG) et (CE) sont perpendiculaires.
2. Sans coordonnées
   - **a.** Développer le produit scalaire $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG})\cdot(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE})$
   - **b.** En déduire que $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CE} = 0$, puis que les droites (AG) et (CE) sont perpendiculaires.



Exercice 17 Un triangle ABC est tel que $AB = 3$, $AC = 5$ et $BC = 7$. On appelle i le milieu du segment $[AB]$.

1. Montrer que $CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \frac{1}{2}AB^2$ *(On décomposera les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ à l'aide de la relation de Chasles en introduisant le point I).*
2. En déduire la longueur CI.

Exercice 18 *Pied de la hauteur* On considère les points $A(4;-1)$, $B(-3;-1)$ et $C(-1;3)$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
2. On appelle H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). En calculant autrement à l'aide du point H le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, en déduire la longueur de AH.
3. Donner une valeur de degrés, arrondie à $0,1^\circ$près, de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 19 *Dans un quadrilatère* On considère le quadrilatère $ABCD$ tel que : $AB = 4$, $BC = 6$, $CD = 5$, $\widehat{ABC} = 69^\circ$et (AB) et (CD) parallèles.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.
2. Calculer la longueur de AC.
3. Calculer une valeur de degrés, arrondie à $0,1^\circ$près, de l'angle $\widehat{ACD}$.

Exercice 20 *Avec Al-Kashi* Dans un triangle ABC rectangle en A, on place le point C' milieu du segment $[AB]$. De plus, on a $AB = 6$ et $BC = 12$.

1. Calculer la valeur exacte de AC
2. Calculer la valeur exacte de CC'