Configuration géométrique

Déterminer une équation cartésienne de cercle

Exercice 1 Donner une équation du cercle de centre $\Omega(-1;-2)$ et de rayon 2.

Exercice 2 Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre $A(3;-2)$ et de rayon 7.

Exercice 3 Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre $T\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{4}\right)$ et de rayon $\frac{5}{2}$.

Exercice 4 On considère les points $A(-3;1)$ et $B(2;5)$.

1. Déterminer les coordonnées du milieu G du segment $[AB]$.
2. Calculer la longueur AG.
3. Donner une équation du cercle de diamètre $[AB]$.

Exercice 5 Déterminer une équation de cercle de diamètre $[AB]$ dans chacun des cas suivants.

1. $A(1;-2)$ et $B(3;0)$
2. $A(3;-1)$ et $B(0;2)$
3. $A(-1;-2)$ et $B(1;3)$
4. $A(-2;4)$ et $B(-1;-3)$

Exercice 6 On donne le point $C(-2;3)$. Déterminer l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $CM=2$.

Exercice 7 On considère les points $A(-2;-3)$ et $B(1;5)$. Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$.

Reconnaître une équation cartésienne de cercle

Exercice 8 On considère l'ensemble des points vérifiant l'équation $x^2-4x+y^2-3y=2$. Montrer que cet ensemble est un cercle dont on donnera le centre et le rayon.

Exercice 9 L'ensemble des points du plan vérifiant l'équation $x^2+3x+y^2+3=0$ est-il un cercle ?

Exercice 10 Pour chacune des équations de cercle suivantes, préciser son centre et son rayon.

1. $x^2-4x+y^2+2y+1=0$
2. $x^2+6x+y^2+4y+7=0$
3. $x^2+8x+y^2+4y+15=0$

Exercice 11 On considère l'ensemble des points du plan vérifiant l'équation : $x^2-3x+y^2+y-2=0$

1. Montrer que cet ensemble est l'équation d'un cercle.
2. Préciser les coordonnées du centre et le rayon de ce cercle.
3. Déterminer si les points $G(1;-2)$ et $N(0;-1)$ appartiennent à ce cercle.

Exercice 12 On considère le cercle de centre $A(-2;1)$ et de rayon 3 et le cercle de centre $B(1;-3)$ et de rayon 4.

1. Calculer la distance AB et en déduire que les deux cercles sont sécants.
2. Donner les équations cartésiennes de ces deux cercles.
3. Montrer que le point $C(1;1)$ appartient à ces deux cercles.
4. En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 13 On considère les équations : $x^2-8x+y^2-6y=0$ et $x^2-6x+y^2-8y+16=0$.

1. Montrer que ces deux équations sont celles de deux cercles
2. Pour chacun, préciser son centre et son rayon.
3. Calculer la distance entre les deux centres.
4. Que peut-on déduire sur la position des deux cercles ? Justifier.

Exercice 14 On considère l'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant l'équation $3x^2-6x+3y^2+2y-1=0$. Montrer que cet ensemble est un cercle dont on précisera le centre et la rayon.

Exercice 15 Dans chacun des cas suivantes, on donne les équations d'un cercle et d'une droite. Déterminer les coordonnées de leurs points d'intersection quand ils existent.

1. le cercle d'équation $x^2-3x+y^2+y-16=0$ et la droite d'équation $y=-4$.
2. le cercle de centre $\Omega(2;3)$ et de rayon $3\sqrt{2}$ et la droite d'équation $x=-1$.
3. le cercle de centre l'origine du repère et de rayon 2, et la droite d'équation $y=3$.

Chercher un ensemble de point

Exercice 16 On considère deux points A et B tels que $AB = 12$ et I le milieu du segment $[AB]$.
Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 4$.

Exercice 17 On considère les points $A(-2;-3)$ et $B(-1;4)$.

1. Calculer la longueur AB
2. Déterminer les coordonnées du milieu du segment $[AB]$.
3. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Exercice 18 On considère deux points D et K tels que $DK = 5$.
Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MK} = \frac{11}{4}$.

Exercice 19 On considère deux points G et N tels que $GN = 7$.
Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MN} = -\frac{11}{2}$.

Exercice 20 On considère deux points C et V tels que $CV = 8$.
Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{VM} = -4$.

Exercice 21 On considère un triangle ABC et A' est le milieu du segment $[\grave{I}BC]$.
Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$.

Exercice 22 $ABCD$ est un quadrilatère quelconque.

1. Déterminer l'ensemble Γ_1 des points vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
2. Déterminer l'ensemble Γ_2 des points vérifiant $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$.
3. Démontrer que $ABCD$ rectangle équivaut à Γ_1 et Γ_2 confondus.

Exercice 23 On considère les points $A(1\ ;\ 2)$ et $B(-1\ ;\ 4)$ dans un repère orthonormé.

1. Calculer la longueur AB.
2. Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.
3. Montrer que, pour tout point M, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 2$.
4. Caractériser l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ vérifiant :

   a. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ b. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 98$ c. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -2$ d. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -18$ e. $MA^2 = 8$

Exercice 24 On considère un triangle ABC et I est le milieu de $[BC]$.
Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$.

Exercice de synthèse

Exercice 25 On donne les points $A(-2;1)$, $B(0;-3)$ et $C(3;-1)$.

1. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à $[AC]$ passant par B.
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point B sur la droite $[AC]$.
4. Donner une équation cartésienne du cercle de diamètre $[AC]$.
5. Le point B appartient-ils à ce cercle ? Justifier.
6. Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 26 On donne les points $A(4;2)$, $B(2;6)$ et $C(-2;2)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AC]$.
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection O de ces deux droites.
4. Calculer la longueur OA.
5. Donner une équation cartésienne du cercle de centre O et de rayon OA.
6. Vérifier que ce cercle passe par B et par C.

Exercice 27 On considère un segment $[AB]$ de longueur 2 et de milieu le point I.

1. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 3$
2. Exprimé $MA^2 + MB^2$ en fonction de MI.
3. En déduire l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 10$
4. Comparer les deux ensembles obtenus.

Exercice 28 On considère les points $A(4;-1)$ et $B(3;2)$. On cherche à étudier l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifiant $MA^2 + MB^2 = 54$.

1. Exprimer $MA^2 + MB^2$ en fonction de x et y.
2. En déduire l'ensemble des points M cherché.
3. Donner ses caractéristiques.

Exercice 29 Une droite est dite tangente à un cercle si elle coupe en un seul point. De plus, cette droite est perpendiculaire au rayon du cercle passant par ce point. On considère le cercle de centre $A(2;1)$ et de rayon 2.

1. Donner l'équation cartésienne de ce cercle.
2. Vérifier que le point $H(2;3)$ appartient au cercle.
3. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AH}$. En déduire une équation cartésienne de la tangente au cercle en H.

Exercice 30 On considère les points $A(2;5)$, $B(-1;-2)$ et $C(7;0)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de A.
2. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de B.
3. Déterminer les coordonnées du point H, orthocentre du triangle ABC, intersection des hauteurs.
4. Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC défini par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.
5. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[BC]$.
6. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AC]$.
7. Déterminer les coordonnées du point O, centre du cercle circonscrit à ABC, intersection des médiatrices.
8. Démontrer que les points O, G et H sont alignés sur une même droite, appelée la droite d'Euler.

Exercice 31 On considère deux cercles d'équations $x^2 + 2x + y^2 - 10y + 1 = 0$ et $x^2 - 8x + y^2 + 5y + 16 = 0$.

1. Déterminer les centres et les rayons de ces deux cercles.
2. Montrer que ces deux cercles sont tangents à l'axe des abscisses,
3. Déterminer les coordonnées des deux points d'intersections$A$ et B de ces deux cercles.
4. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$.
5. Les cercles passant par les deux points A et B ont leur centre $C(a;b)$ sur cette médiatrice. Calculer leur rayon en fonction de a.
6. Donner alors une équation cartésienne de ces cercles en fonction de a.
7. Pour quelles valeurs de a ces cercles coupent-ils l'axe des abscisses.

Exercice 32 On considère le cercle $\mathscr{C}_{(A,r)}$ avec $A(6;-1)$ et $r = 10$, et le cercle $\mathscr{C}'_{(B,r')}$ avec $B(0;-4)$ et $r = 5$.

1. Déterminer les équations cartésiennes de ces deux cercles.
2. Donner le système vérifié par les points $M(x;y)$ qui appartiennent aux deux cercles.
3. Résoudre ce système.
4. En déduire les coordonnées des deux points d'intersection de ces cercles.

Exercice 33 On considère le cercle de centre $A(0;3)$ et de rayon $\sqrt{5}$, et la parabole d'équation $y = x^2$.

1. Donner l'équation du cercle.
2. Montrer que chercher les points d'intersection du cercle et de la parabole revient à résoudre l'équation bicarrée $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.
3. Résoudre cette équation en posant $X = x^2$. En déduire les coordonnées de tous les points d'intersection.