Fonction exponentielle

Calcul algébrique

Exercice 1 Simplifier les expressions suivantes :

1. $\exp(3)\exp(5)$
2. $\exp(-2)\exp(4)$
3. $\dfrac{1}{\exp(-5)}$
4. $(\exp(5))^3$

Exercice 2 Simplifier les expressions suivantes :

1. $e^3 e^4$
2. $e^4 e^{-4}$
3. $\dfrac{e^5 e^{-3}}{e^{-2}}$
4. $e^5 e$
5. $(e^4)^3 e^4$
6. $e\,e^5 + 5(e^2)^3$
7. $(e^3)^{-2} e^5$
8. $\dfrac{e-\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}$

Exercice 3 Simplifier les expressions suivantes :

1. $e^x e^{-x}$
2. $e^x e^{-x+1}$
3. $e\,e^{-x}$
4. $\dfrac{e^{2x}}{e^{2-x}}$
5. $(e^{-x})^2$
6. $e^x(e^x+e^{-x})$
7. $(e^x)^5(e^{-2x})^2$
8. $\dfrac{(e^x)^3}{e^{2x}}$
9. $e^{-3x+1}(e^x)^3$
10. $\sqrt{e^{-2x}}$
11. $(x\,e^x)^{-2}$
12. $\dfrac{e^{-4x}e}{(e^{-x})^2}$

Exercice 4 Simplifier les expressions suivantes :

1. $(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2$
2. $(e^x-e^{-x})^2-e^{-x}(e^{3x}-e^{-x})$
3. $(e^x-e^{-x})(e^{2x}+e^x+1)$
4. $(e^{3x})^2+(e^{-3x})^2-(e^{3x}-e^{-3x})^2$
5. $(e^{3x})^2-e^{2x}(e^{2x}+e^{-2})^2$

Résolution d'équation

Exercice 5 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $\exp(x)=e$
2. $\exp(-x)=1$
3. $\exp(2x-1)=e$
4. $e^{x^2+x}=1$
5. $e^x-e^{-x}=0$
6. $e^{x^2+5}=(e^{x+2})^2$
7. $e^x+e^{-x}=0$
8. $e^{3x+1}=e^{-2x+3}$
9. $e^{2x}-1=0$
10. $x\,e^{2x}-2e^{2x}=0$

Exercice 6 Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $\exp(x)<e$
2. $\exp(-x)\geqslant 1$
3. $e^{2x-1}>e^x$
4. $e^x+e^{-x}<2$
5. $e^x<1$
6. $e^{-x}>0$
7. $e^{-x}>1$
8. $e^x-e^{-x}>0$
9. $e^{2x}-1\geqslant 0$
10. $x\,e^{-x}-3e^{-x}<0$

Exercice 7 Dans cet exercice, on cherche a résoudre une équation non simple avec des exponentielles.

1. Déterminer les racines du polynôme $P(X)=X^2+4X-5$.
2. En déduire les solutions de l'équation $e^{2x}+4e^x=5$.
3. Résoudre les équations suivantes :

   a. $e^{2x}+e^x-2=0$

   b. $e^{2x+1}+e^{x+1}-2e=0$

   c. $e^x-2e^{-x}+1=0$

Exercice 8 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{e^x+3}{e^x-1}>0$
2. $-e^{2x}-e^x+2>0$
3. $e^{2x}+2e^x-3\geqslant 0$
4. $e^{2x}+e^x-2<0$

Exercice 9 Résoudre dans $\mathbb{R}$.

1. $e^{x^2+2}=\dfrac{e^{2x}}{e}$
2. $2e^{2x}+5e^x+3=0$
3. $e^x+e^{-x}>\sqrt{e}+\dfrac{1}{\sqrt{e}}$
4. $e^{x^2}+1\leqslant 2$

Étude de fonction

Exercice 10 Dériver chacune des fonctions suivantes puis étudier leur variations ($x \in \mathbb{R}$) :

1. $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$
2. $h : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$
3. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x+4} - 2x$
4. $f : x \mapsto 4\,\mathrm{e}^{-2x} + 8ex$

Exercice 11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^{x}$.

1. Afficher f sur la calculatrice.
2. Conjecturer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x ainsi que le sens de variation de f.
3. Démontrer ces conjectures.

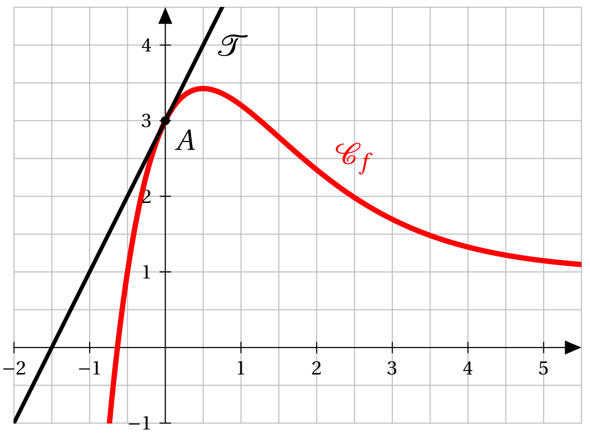
Exercice 12 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}$.

1. Déterminer la dérivée de f.
2. En déduire le sens de variation de f.

Exercice 13 On considère pour tout k, la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = \mathrm{e}^{kx} - kx$. On note $\mathscr{C}_k$ leur courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer une expression de la dérivée de f_k.
2. Montrer que pour tout réel k, la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est horizontale, et donner une équation de cette tangente.
3. Déterminer pour quelle(s) valeur de k la tangente à la courbe $\mathscr{C}_k$ admet une autre tangente horizontale.

Exercice 14 La courbe suivante est celle d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la dérivée de f. La tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(0;3)$ passe par le point $B(1;5)$.



1. En utilisant les données et le graphique, préciser $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.
3. On admet que la fonction f est définie, pour tout nombre réel x, par une expression de la forme : $f(x) = 1 + \dfrac{ax+b}{e^{x}}$ où a et b sont deux réels.
   a. Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de a , b et x.
   b. A l'aide des résultats précédents, montrer que pour tout réel x : $f(x) = 1 + \dfrac{4x+2}{e^{x}}$.

Exercice 15 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-x\,\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x} - 4}{\mathrm{e}^{x}}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.
2. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
3. Étudier les variations de f.
4. Soit d la droite d'équation $y = -x + 1$. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_g$ et de d dans un repère.

Exponentielle et suite

Exercice 16 Donner la nature, la raison ainsi que le sens de variations des suites ci-dessous.

1. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \mathrm{e}^{n}$
2. (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \mathrm{e}^{-4n}\,n$
3. (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \mathrm{e}^{3n}$
4. (a_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = \mathrm{e}^{2}\,n$
5. (b_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ par $b_{n+1} = \mathrm{e}^{0,5}\,b_n$
6. (c_n) définie par $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ par $c_{n+1} = \mathrm{e}^{-2} + c_n$