Fonctions dérivées

Exercice 1 En utilisant la définition, montrer que la dérivée de la fonction inverse vaut $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Exercice 2 Soit $f : x \mapsto |x|$ la fonction valeur absolue, définie sur $\mathbb{R}$. On rappelle que si x est positif, $|x| = x$ et si x est négatif, $|x| = -x$. Soit h un nombre réel non nul.

1. Si h est un strictement positif, montrer que la taux de variation de f entre 0 et $0+h$ est égale à 1.
2. Si h est un strictement négatif, montrer que la taux de variation de f entre 0 et $0+h$ est égale à -1.
3. La fonction valeur absolue est-elle dérivable en 0 ? Justifier.

Exercice 3 Pour chacune des fonctions suivantes, dire sur quel ensemble elle est dérivable, puis déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto x^4$
2. $f : x \mapsto x^{12}$
3. $f : x \mapsto x^3$
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$
5. $f : x \mapsto \sqrt{x}$

Exercice 4 Chacune des fonctions suivantes est de la forme d'une somme de deux fonctions u et v. Dans chaque cas, identifier les fonctions u et v, et donner leurs ensembles de dérivabilité. En déduire sur quel ensemble la fonction « somme » est dérivable, puis déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$
2. $f : x \mapsto \sqrt{x} - 5$
3. $f : x \mapsto x^4 + x^2$

Exercice 5 Chacune des fonctions suivantes est de la forme d'un produit d'une fonction u par un réel k. Dans chaque cas, identifier k et u, et donner leurs ensembles de dérivabilité. En déduire sur quel ensemble la fonction ku est dérivable, puis déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto -x$
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2$
3. $f : x \mapsto \dfrac{2}{7}x$
4. $f : x \mapsto 7x^3$
5. $f : x \mapsto -\dfrac{5}{8}\sqrt{x}$

Exercice 6 Chacune des fonctions suivantes est de la forme d'un produit d'une fonction u par un réel k. Dans chaque cas, identifier k et u, et donner leurs ensembles de dérivabilité. En déduire sur quel ensemble la fonction ku est dérivable, puis déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto \dfrac{x}{9}$
2. $f : x \mapsto \dfrac{3x^2}{8}$
3. $f : x \mapsto \dfrac{-x^4}{44}x$
4. $f : x \mapsto \dfrac{11}{3x}$
5. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{5}\sqrt{x}$

Exercice 7 Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto 2x^2 + 3x - 5$
2. $f : x \mapsto 2x^6 + 3\sqrt{x} - 5$
3. $f : x \mapsto \dfrac{3}{4}x^4 + \dfrac{7}{9}x^3$

Exercice 8 Soit f la fonction définie sur $I =]-\infty; 4[$ par $h : x \mapsto \sqrt{-3x+12}$.

1. h est une fonction composée de deux fonctions g et f dans cet ordre. Donner l'expression de g et f.
2. En utilisant la propriété sur la dérivée d'une fonction composée, démontrer que la fonction f est dérivable sur I.
3. Déterminer l'expression de f' et de g'.
4. End déduire l'expression de la dérivée h'

Exercice 9 Chacune des fonctions suivantes est de la forme d'un produit de deux fonctions u et v. Dans chaque cas, identifier les fonctions u et v, et donner leurs ensembles de dérivabilité. En déduire sur quel ensemble la fonction « produit » est dérivable, puis déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}(9 - 6x)$
2. $f : x \mapsto x^2\sqrt{x}$
3. $f : x \mapsto (x^6 + x^4)(x^2 - 4)$

Exercice 10 Soit f la fonction définie sur $I =]-4;+\infty[$ par $f : x \mapsto \dfrac{1}{2x+8}$.

1. f est de la forme $\dfrac{1}{u}$. Donner l'expression de la fonction v et résoudre l'équation $u(x) = 0$ sur I.
2. En utilisant la propriété sur la dérivée de l'inverse d'une fonction, démontrer que la fonction f est dérivable sur I et donner l'expression de sa dérivée f'.

Exercice 11 Soit f la fonction définie sur $I =]-1;+\infty[$ par $g : x \mapsto \dfrac{1-2x}{3x+3}$.

1. g est de la forme $\dfrac{u}{v}$. Donner l'expression de la fonction u et v et résoudre l'équation $v(x) = 0$ sur I.
2. En utilisant la propriété sur la dérivée d'un quotient d'une fonction, démontrer que la fonction g est dérivable sur I et donner l'expression de u' et v'.
3. En déduire l'expression de la dérivée de g'.

Exercice 12 Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer sa forme, puis en déduire sur quel ensemble elle est dérivable et sa fonction dérivée f'.

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 - 3x$
2. $f : x \mapsto (8-9x)\sqrt{x}$
3. $f : x \mapsto \dfrac{3x-11}{x+1}$
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-7}$

Exercice 13 Déterminer pour chacune des fonctions suivantes sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$.

1. $f : x \mapsto \dfrac{3x^4}{8} - \dfrac{5x^3}{3} + 2x - \dfrac{11}{2}$
2. $g : x \mapsto \dfrac{x^2+x+1}{6}$
3. $h : x \mapsto \dfrac{x-3}{2}$

Exercice 14 Déterminer pour chacune des fonctions suivantes, l'ensemble I sur lequel elle est dérivable, sa fonction dérivée sur I.

1. $f : x \mapsto \dfrac{5}{2x} - \dfrac{3}{4} + 2x - \dfrac{7x^2}{4}$
2. $f : x \mapsto \dfrac{-4}{5x}(x-11)$
3. $f : x \mapsto \dfrac{5x^2-8x+1}{21-7x}$
4. $f : x \mapsto \dfrac{-5}{3x^2+2}$
5. $f : x \mapsto \dfrac{9x}{x^2-6x+5}$
6. $f : x \mapsto \sqrt{10-x}$

Exercice 15 On appelle « dérivée seconde » et on note f'' la fonction dérivée de la fonction f' qui est elle-même la fonction dérivée de la fonction f. Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto 2x^3 - 7x^2 + 15x - 50$
2. $f : x \mapsto \dfrac{3x-4}{-5x+7}$

Exercice 16 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ax^2 + bx + c$, dont la fonction dérivée f' est définie pour tout réel x par : $f'(x) = 6x + 7$.

1. Déterminer une expression de possible de $f(x)$ et en déduire les réels a et b.
2. Sachant que la courbe représentative de la fonction f passe par le point de coordonnées $(1;6)$, en déduire le réel c.

Exercice 17 *SES* Une entreprise produit chaque jour entre 1 tonnes et 20 tonnes de peinture. Le cout de production de x tonnes de peinture, en milliers d'euros, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[1;20]$ par $C(x) = 0,05x^2 - 0,1x + 2,45$. En 2018, elle a produit quotidiennement 10 tonnes de peinture.

En économie, le cout marginal C_m représente l'augmentation du cout engendré par la production d'une tonne supplémentaire. Ainsi pour x tonnes produites, on a $C_m(x) = C(x+1) - C(x)$.

1. Calculer le cout marginal $C_m(10)$ pour une production de 10 tonnes, puis $C_m(11)$
2. Les économistes considèrent que $C'(x)$ est une bonne approximation du cout marginal.
   - **a.** Justifier que la fonction C est dérivable sur $[1;20]$ et déterminer la fonction dérivée C'.
   - **b.** En déduire $C'(10)$ et $C'(11)$.
   - **c.** Comparer aux résultats de la question **1.**