Signe d'une fonction polynôme du second degré

Factorisation d'un trinôme

Exercice 1 Pour chaque trinôme ci-dessous, déterminer si elle existe sa forme factorisée :

1. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - 12,5$
2. $g(x) = 4x^2 + 4x - 8$
3. $h(x) = 2x^2 - 5x + 6$
4. $i(x) = 3x^2 - 2x + 2,4$

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4(x-1)^2 - 16$.

1. Écrire $f(x)$ sous la forme $a^2 - b^2$
2. En utilisant une identité remarquable, en déduire la forme factorisée de f.

Résolution d'inéquations et signes

Exercice 3 Sans calcul, dresser le tableau de signes de chaque fonction définie ci dessous.

1. $f(x) = 2(x+2)(x-3)$
2. $g(x) = -2\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$
3. $h(x) = x^2 + 5$

Exercice 4 Dresser le tableau de signes de chaque fonction définie ci-dessous.

1. $f(x) = 2x^2 - 4x - 16$
2. $g(x) = 9x^2 + 24x + 16$
3. $h(x) = 2x^2 - 5x + 6$

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes sans utiliser le discriminant.

1. $x^2 - 2x > 0$
2. $x^2 - 81 \leqslant 0$
3. $(x-1,5)(x+2,8) > 0$
4. $x^2 + 20 < 0$

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $3x^2 - 4x + \frac{4}{3} \leqslant 0$
2. $5x^2 - 50,5x + 5 < 0$
3. $x^2 + x + 1 > 0$
4. $-2x^2 + 3x - 6 < 0$

Exercice 7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $(3x^2 + x + 2)(x+3) \leqslant 0$
2. $(5x^2 - x + 3)(3 - 2x) < 0$
3. $(-x^2 + x - 7)(3x^2 - x + 2) \geqslant 0$

Exercice 8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $\frac{3x^2 - 4x + 7}{2x + 1} \leqslant 0$
2. $\frac{3x^2 + 9x + 6}{(x+3)^2} < 0$

Exercice 9 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -n^3 + 2n^2 - 3n$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -3n^2 + n - 2$.
2. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
3. En déduire les variations de la suite (u_n).

Exercice 10 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -3n^2 - 16n + 2$

1. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n.
2. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
3. En déduire les variations de la suite (u_n).

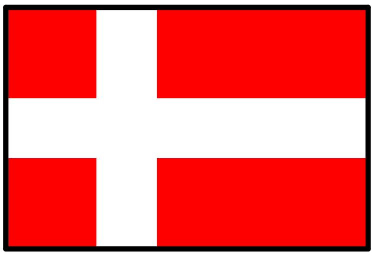
Résolution de problèmes

Exercice 11 Audrey décide d'encadrer une gravure dans un cadre rectangulaire de largeur constante. La gravure mesure 30 cm sur 45 cm et le cadre a une largeur de x cm.

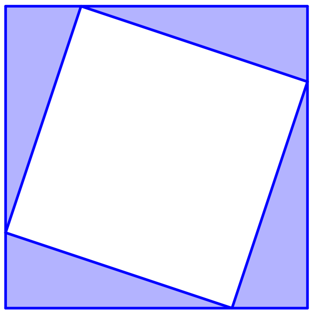
1. Si la cadre a une largeur de 2 cm, quelle sera l'aire totale de la gravure avec son cadre, en cm^2.
2. On note $f(x)$ l'aire de la gravure et du cadre en cm^2
   - **a.** Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
   - **b.** Pour quelle valeur de x l'aire de la gravure et du cadre est-elle égale à 1924 cm^2 ?
   - **c.** Charlotte ne veut pas que l'aire du cadre dépasse 850cm^2.
     Que peut-elle choisir comme valeur(s) pour x ?

Exercice 12

Le drapeau danois est formé par deux bandes de **même** largeur, comme sur la figure ci-contre. Quelle largeur doit-on donner à la croix pour que son aire soit égale à l'aire restante du drapeau ? (dimensions du drapeau : 3 m × 2 m)



Exercice 13



Soit $ABCD$ un carré de coté 5 cm. E, F, G et H sont des points appartenant aux cotés du carré tels que $AE=BF=CG=DH=x$. On admet que $EFGH$ est aussi un carré.

1. Quelle est l'aire du quadrilatère $EFGH$?
2. Pour quelle valeur de x cette aire est-elle minimale ? Quelle est la valeur de l'aire minimale ?
3. Pour quelle(s) valeur(s) de x cette aire est-elle égale à 14,12 cm^2
4. Pour quelle(s) valeur(s) de x cette aire est-elle inférieure ou égale à 13 cm^2

Exercice 14 Un parachutiste saute d'un avion sans vitesse initiale.

Dans cet exercice, on néglige les frottements de l'air. Avant de déployer son parachute, son altitude en mètres est donnée par la fonction $h(t) = -4,9t^2 + 3500$, ou t désigne le temps en secondes.

1. A quelle altitude était l'avion lors du saut ?
2. Le parachute doit être déployé à une altitude de 1500 m. Au bout de combien de temps le parachutiste doit-il déployer son parachute ?

Exercice 15 Une urne contient une boule rouge et n boules blanches. On tire successivement, et avec remise, deux boules dans l'urne.

1. Représenter l'expérience aléatoire à l'aide d'un arbre de probabilité.
2. Exprimer en fonction de n la probabilité des évènements :
   - M : « Les deux boules sont de la même couleur. »
   - N : « Les deux boules sont de couleur différente. »
3. On sait que $p(M) = 5,05 \times p(N)$. Déterminer la valeur de n.

Exercice 16 On veut étudier la position relative de deux paraboles, l'une d'équation $y = 3x^2 - 5x - 20$ et l'autre d'équation $y = x^2 - 3x - 2,5$.

1. A l'aide de la calculatrice, conjecturer les éventuels points d'intersection et la position relative des deux paraboles.
2. Démontrer la conjecture.

Exercice 17 Au bord de la rivière, un bateau fait un aller-retour entre deux embarcadères séparés de 50 km. il navigue à une vitesse de 30 km/h, soit environ 16 nœuds, sans prendre en compte la vitesse du courant.

On suppose que le sens et la vitesse du courant ne changent pas.

A l'aller le bateau va dans le sens du courant et au retour il va à contre-courant.

Sachant que le bateau à mis 15 minutes de plus au retour qu'à l'aller, quelle est la vitesse du courant ? On arrondira au centième près.