Variables aléatoires réelles

Déterminer une loi de probabilité

Exercice 1 Une urne contient trente boules numérotées de 1 à 30. On tire au hasard une boule.
Si le numéro de la boule est compris entre 1 et 15, on gagne 2€, s'il est compris entre 16 et 27, on gagne 10€. Sinon on gagne 50 €. On note X la variable aléatoire donnant le gain à chaque boule tirée au sort.

1. Quelles sont les valeurs possibles prises par X ?
2. Établir le tableau donnant la loi de probabilité de X.

Exercice 2 Dans une entreprise, il y a 500 employés. La tableau de répartition des salaires est le suivant.
On note Y la variable aléatoire donnant le salaire perçu par un employé tiré au sort dans l'entreprise.

Salaire en euro	1600	2000	2500	3000
Nombres de personnes	300	150	45	5

1. Quelles sont les valeurs possibles prises par Y ?
2. Dresser un tableau donnant la loi de probabilité de Y.

Exercice 3 Ilona a écrit chacun des mots « *Rien ne sert de courir, il faut partir à point* » (morale de Jean de la Fontaine) sur des cartons qu'elle met dans l'urne.
Elle tire au hasard un carton.
On considère la variable aléatoire N qui associe à chaque issue le nombre de lettres du mot écrit sur le carton. Déterminer la loi de probabilité de N.

Exercice 4 On lance deux dés équilibrés à 4 faces numérotées de 1 à 4. On note X la variable aléatoire qui à chaque lancer associes la valeur du plus grand numéro obtenu sur les deux dés. Déterminer la loi de probabilités de X.

Exercice 5 Une variable aléatoire peut prendre les valeurs -120; 0; 150; 300; et 1000. Définir par une phrase et donner les issues possibles des évènements suivants.

1. $\{X = 150\}$
2. $\{X = 10\}$
3. $\{X > 100\}$
4. $\{X > 300\}$
5. $\{X \geqslant 300\}$
6. $\{X \leqslant 0\}$

Exercice 6 On lance 15 fois de suite un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de « 6 » obtenu sur les 15 lancers.
Utiliser une notation pour écrire les probabilités des évènements suivants :

1. Le dé est tombé cinq fois sur « 6 »
2. Le dé est tombé au moins une fois sur « 6 »
3. Le dé est tombé au plus trois fois sur « 6 »
4. Le dé est tombé plus de dix fois sur « 6 »

Exercice 7 La loi de probabilité de X est donnée par la tableau :
Déterminer les probabilités suivantes :

x_i	0	2	3	5	7
$P(X = x_i)$	$0,1$	$0,15$	$0,16$	$0,45$	$0,14$

1. $\{X = 5\}$
2. $\{X \leqslant 5\}$
3. $\{X > 5\}$
4. $\{X \geqslant 2\}$
5. $\{X = 0\}$
6. $\{0 < X < 5\}$

Exercice 8 X est une variable aléatoire prenant les valeurs -1; 0; et 1 telle que : $P(X = 1) = P(X = 0)$ et $P(X = -1) = 3 \times P(X = 1)$.

1. Dresser le tableau donnant la loi de probabilité de X.
2. Calculer $P(X > 0)$

Exercice 9 Pour traverser le couloir du deuxième étage du lycée, Ibrahim met cinq minutes. Il sait que si, lors de cette traversée, il rencontre un ami, il parlera avec lui deux minutes.
Il y a deux salles devant lesquelles il peut retrouver un ami et la probabilité qu'il rencontre un devant une salle est de $0,3$. Ces rencontres sont indépendantes.
X est la variable aléatoire donnant le temps de traversée du couloir en minute.
Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 10 Une urne contient $n \geqslant 10$ boules indiscernables au toucher dont cinq sont rouges, deux sont vertes et les autres sont jaunes.
On tire au hasard une boule dans l'urne. Si celle-ci est vert, on gagne 3€, si elle est jaune on gagne 5€, sinon on perd 2 €. X est la variable aléatoire associant le gain algébrique au jeu.

1. Déterminer la loi de probabilité de X (les probabilités seront écrites en fonction de n)
2. Comment faut-il choisir n pour que la probabilité de gagner de l'argent soit supérieur ou égale a $0,6$?

Calculer et utiliser une espérance

Exercice 11 La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

x_i	-2	1	11
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

1. En utilisant la définition du cours, calculer l'espérance de X.
2. Vérifier le résultat avec la calculatrice.

Exercice 12 On considère un jeu de hasard. la variable aléatoire X donnant le gain (mise comprise) a une loi de probabilité résumé dans le tableau ci-dessous.

x_i	-5	-2	0	50
$P(X = x_i)$	$0,4$	$0,3$	$0,28$	$0,02$

1. En utilisant la définition du cours, calculer $E(X)$.
2. Interpréter ce résultat.
3. Ce jeu est-il équitable?

Exercice 13 Alice mise 3 €puis lance un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Elle gagne une valeur en euros égales au double du numéro affiché par le dé. Quel montant peut-elle espérer gagner (ou perdre) en moyenne si elle joue un très grand nombre de parties à ce jeu?

Exercice 14 Un jeu consiste à lancer deux dés tétraédriques dont les faces sont numérotées de 1 à 4. Après un lancer, on fait la somme des numéros des faces. La mises de départ est m €(m étant un nombre réel positif). Puis :

- On gagne 10 €si on obtient un résultat supérieur ou égal à 6.
- On gagne 20 €si on obtient un résultat inférieur à 4.
- On gagne rien sinon.

1. Pour cette question, on prend $m = 5$. X est la variable aléatoire donnant le gain algébrique du jeu.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Déterminer $E(X)$. Ce jeu est-il à l'avantage du joueur ou de l'organisateur?
2. Pour quelle valeur de m le jeu est-il équitable?

Exercice 15 X est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-contre :

x_i	-100	5	10	20
$P(X = x_i)$	p	$\ldots$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

1. Si $p = 0,2$, calculer l'espérance de X.
2. Calculer p pour que l'espérance de X soit égale à 4.

Calculer des indicateurs

Exercice 16 La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

x_i	-2	4	6
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

1. En utilisant la définition du cours, calculer $E(X)$.
2. En utilisant les définitions du cours, calculer la variance de X et en déduire l'écart-type de X.
3. Vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice.

Exercice 17 Pour chacune des variables aléatoires suivantes dont on donne la loi de probabilité à l'aide d'un tableau, déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type (si besoin on arrondira les résultats à $0,01$ près).

1.

x_i	-4	0	9	25
p	$0,5$	$0,2$	$0,2$	$0,1$

2.

x_i	-25	-3	5	100
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$0,3$	$0,2$

3.

x_i	-5	0	4	10
p	$0,42$	$0,38$	$0,15$	$0,05$

Exercice 18 Une roue est partagée en 10 secteurs angulaires égaux dont 5 sont colorés en rouge, 3 en vert et 2 en jaune. On tourne la roue et elle s'arrête au hasard sur un secteur angulaire. Si celui-ci est vert, on gagne 5 €, s'il est jaune on gagne 20 €et s'il est rouge on perd 4 €. X est la variable aléatoire donnant le gain algébrique de ce jeu.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E(X)$, $Var(X)$ et $\sigma(X)$ à l'aide des formules du cours.
3. Interpréter la valeur de $E(X)$.

Exercice 19 Un entreprise compte 100 salariés. La tableau de répartitions des salaires est le suivant.

Le directeur prend au hasard le bulletin de salaire de l'un de ses employés. On note X la variable aléatoire donnant le salaire perçu par un employé tiré au sort.

Salaire (en €)	1550	1750	2200	3000
Nb de personnes	40	35	24	1

1. Calculer $E(X)$.
2. Le directeur décide d'augmenter tous les salaires de 10€. Que devient l'espérance.
3. Finalement au lieu de l'augmenter de 10 €, il décide de les augmenter de 2%. Comment évolue l'espérance ?

Simuler une variable aléatoire

- La fonction `Alea()` renvoie un nombre réel aléatoire entre 0 et 1 exclu.
- Pour tous les programmes python, le module random est importé et la commande `random.random()` renvoie un nombre aléatoire entre 0 et 1 exclu.

Exercice 20 Y est un variable aléatoire donnant un gain à un jeu. Sa loi de probabilité est donnée dans le tableau ci dessous.

y_i	-5	0	4
$P(Y=y_i)$	0,80	0,12	0,08

```
aleat = alea()
Si aleat <= 0.8
        Afficher "..."
Fin Si
Si aleat <= ... et aleat > ...
        Afficher "5"
Fin Si
Si aleat > ...
        Afficher "..."
Fin Si
```

On souhaite construire une simulation de la variable aléatoire Y.

1. Compléter le tableau suivant donnant un découplage de $[0;1]$ permettant de satisfaire aux probabilités

y_i	-5	0	4
$P(Y=y_i)$	Entre 0 et ... inclus	Entre ... et 0,92 inclus	Entre 0,92 et 1 exclus

2. Compléter l'algorithme ci-dessus permettant d'obtenir une valeur prise par la variable aléatoire Y.

Exercice 21 Un valeur prise par une variable aléatoire X est obtenue avec le programme suivant . Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance.

```
alea = random.random()
if alea <= 0.72 :
        print("-8")
if alea <= 0.95 and alea >0.72 :
        print("50")
if alea > 0.95 :
        print("80")
```

Exercice 22 Une entreprise fabrique des centrifugeuses. Son service de qualité à relevé le nombre d'années entières (donc arrondi) écoulées avant la première panne pour chacune des centrifugeuses d'un échantillon. Ces données on permis de donner des estimations des probabilités pour ces durées avant la première panne.
Christian a écrit le programme ci-contre permettant de simuler le nombre d'années entières avant la première panne pour une centrifugeuse. Si le programme affiche « 2 ans », cela signifie qu'une centrifugeuse a fonctionné 2 ans (entier) avant la première panne.

```
import random
alea=random.random()
if alea <= 1/6:
        print("2 ans")
if alea > 1/6 and alea <= 0.5:
        print("4 ans")
if alea > 0.5:
        print("5ans")
```

1. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'années entières écoulées avant la première panne. Donner la loi de probabilité de X.
2. Est-il vrai qu'une centrifugeuse tombera en panne avant 7 ans ?
3. Quelle est la durée moyenne avant qu'une centrifugeuse ne tombe en panne ?