❉ Chapitre 17 ❉

Calcul vectoriel - Colinéarité

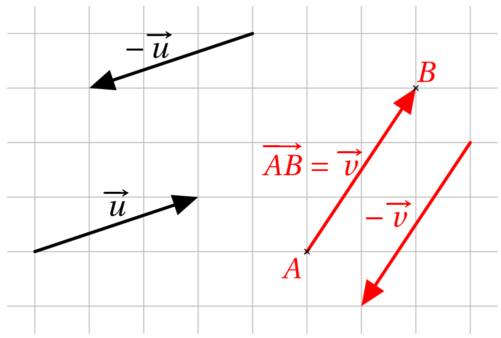
Objectif du chapitre :

- Définir l'opposé d'un vecteur, le produit d'un vecteur par un réel.
- Utiliser les coordonnées de vecteur pour des calculs.
- Reconnaître et exploiter une situation de colinéarité.

I. Opposé d'un vecteur

Définition 1:

Quels que soient les points A et B, le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est appelé **vecteur opposé** au vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Remarque :

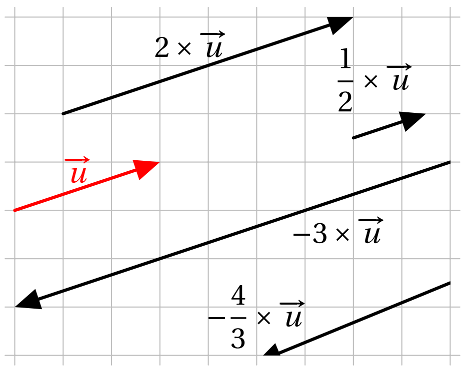
- Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, alors $-\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}$.
- Si une symétrie centrale transforme A en A' et B en B', alors on a $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$

II. Multiplication d'un vecteur par un nombre réel λ

1. Définition générale

Définition 2:

Soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul et λ un réel non nul, on définit le vecteur $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC}$ par :
- A, B et C sont alignés,
- Si $\lambda > 0$, $AC = kAB$ et B et C sont du même côté par rapport à A,
- Si $\lambda < 0$, $AC = -kAB$ et B et C sont de part et d'autre de A.



Remarque :

Si $\overrightarrow{u} = 0$ ou $\lambda = 0$ alors $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$

Propriété 1 :

Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et les réels λ et μ, on a :
- $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$
- $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$
- $\lambda(\mu\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{u}$
- $\lambda\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \lambda = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Remarque :

Si une homothétie de rapport λ transforme A en A' et B en B', alors on a $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}$

2. Utilisation des coordonnées vectorielles

Propriété 2 : *Produit d'un vecteur par un réel*

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et k un réel. Le vecteur $\overrightarrow{w} = k\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$

Exemple 1:

Soient les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}5x\\x+y\end{pmatrix}$ alors :

- $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{w} \iff \begin{cases} 5x & & & = & 5 \\ x & + & y & = & 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & 1 \\ y & = & 2 \end{cases}$
- $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1+5\\-3+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$
- $-\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$
- $5\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}5\times 5\\5\times 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\15\end{pmatrix}$
- $-\overrightarrow{u}+5\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-1+25\\3+15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\18\end{pmatrix}$

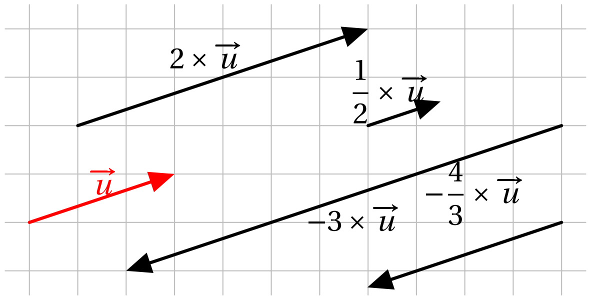
III. Colinéarité de deux vecteurs

1. Définition générale

Définition 3:

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k non nul tel que

$$\overrightarrow{v}=k\overrightarrow{u}$$

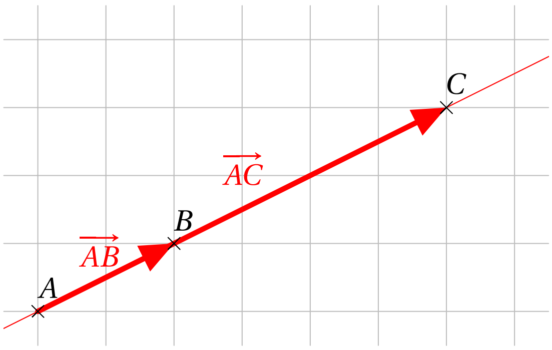


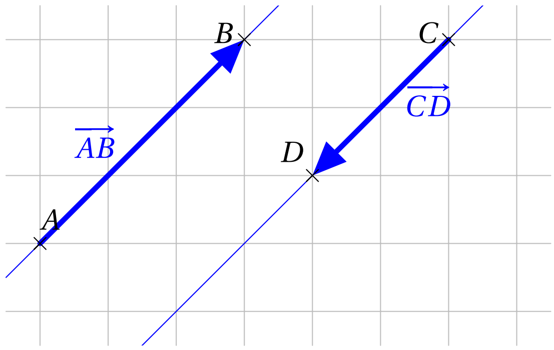
Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont la même direction.

Sur le dessin ci-dessous, tous les vecteurs dessinés sont colinéaires entre eux.

Propriété 3 :

- Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires,
- deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.





2. Coordonnées vectorielles et déterminant de deux vecteurs

Définition 4:

Dans un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath})$, on considère les vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

Le déterminant de $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ est le réel tel que :

$$\det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})=xy'-yx'$$

Propriété 4 :

Les vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})=0$.

Démonstration : *Exigible en fin de seconde*

Proposition à démontrer : « Les vecteurs non nuls $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$ »

On cherche à démontrer une équivalence.

Commençons par l'implication ($\Longrightarrow$) :

$$\begin{aligned}
\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \text{ colinéaires} &\Longrightarrow \vec{u} = k\vec{v} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}\\
&\Longrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}kx'\\ky'\end{pmatrix}\\
&\Longrightarrow \det(\vec{u};\vec{v}) = xy' - x'y = (kx')y' - x'(ky') = kx'y' - kx'y' = 0
\end{aligned}$$

Ensuite la réciproque ($\Longleftarrow$) :
Si $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$ alors $xy' - x'y = 0$

Pour la suite, procédons par disjonction des cas :

- Si $\vec{u} = 0$, alors $\vec{u} = 0.\vec{v}$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- Si $\vec{u} \neq 0$, alors l'une au moins des deux coordonnées de $\vec{u}$ est non nulle. Par exemple, supposons que $x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
xy' - x'y = 0 &\Longrightarrow xy' = x'y \Longrightarrow y' = \frac{x'}{x}y\\
&\Longrightarrow y' = ky \quad \text{avec } k = \frac{x'}{x} \Longrightarrow y' = ky \quad \text{et} \quad x' = kx\\
&\Longrightarrow \vec{v} = k\vec{u} \Longrightarrow \vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \text{ colinéaires}
\end{aligned}$$

Enfin la conclusion : Pour démontrer une équivalence, nous avons fait un raisonnement par double implication.
Les deux propositions logiques « $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires » et « $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$ » sont équivalentes. ■

Exemple 2:

On considère les trois vecteurs du plan suivants : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\9\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$.

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car $2 \times 9 - (-3) \times (-6) = 18 - 18 = 0$,
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires car $2 \times (-7) - (-3) \times 5 = -14 + 15 = 1 \neq 0$.

Exemple 3:

Soient quatre points $A(1;1)$, $B(1;3)$, $C(7;4)$ et $D(5;5)$ du plan.
Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}7-1\\4-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}5-1\\5-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$,

$xy' - yx' = 6 \times 2 - 3 \times 4 = 0$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires,
les droites (AC) et (BD) sont donc parallèles.

De plus, $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$;

donc : $\boxed{ABDC \text{ est un trapèze}}$