❉ Chapitre 8 ❉

Expressions algébriques

Objectif du chapitre :

- Présenter une expression polynomiale sous forme développée, réduite et ordonnée.
- Les méthodes, techniques pour développer : distributivité, double distributivité, identités remarquables.
- Connaître et savoir appliquer les formules de factorisation.
- Connaître la démarche de recherche d'une factorisation.

I. Les polynômes

Définition 1:
Les monômes sont des expressions algébriques formées du produit d'un coefficient a réel par une puissance (entière) d'une indéterminée X : aX^n.

Exemples de monômes : $4X^0 = 4$, $-3X^1 = -3X$, πX^2, $12,5X^7$ et $0X = 0$

L'exposant de X est appelé le degré du monôme.
Par exemple : $-3X$ est de degré 1, πX^2 est de degré 2, $12,5X^7$ est de degré 7, 4 est de degré 0 et $0X = 0$ est de degré $-\infty$.

Un polynôme est une somme (finie) de monômes.
Par exemple : $-3+8X^2+4X-7X^3-7X+10$ est un polynôme.

On dit qu'un polynôme est **réduit** lorsque tout ses monômes sont de degrés distincts. Ainsi $3X^2-12X^5+2$ est sous forme réduite mais $5+7X-14X^2+8X$ n'est pas sous forme réduite car les monômes $7X$ et $8X$ sont semblables (même degré).

Le degré d'un polynôme réduit est le plus grand degré de ses monômes.

Un polynôme réduit est dit **ordonné** lorsque ses monômes sont rangés suivant les puissances décroissantes de l'indéterminée X.
Par exemple $-7X^3+X-3$ est ordonné alors que $X-7X^2+2$ ne l'est pas.

Les polynômes ont ceci de merveilleux qu'ils peuvent s'appliquer à un très grand nombre d'objets. X peut désigner des nombres bien sûr mais aussi des polynômes, des fonctions, des transformations géométriques, des tableaux de nombres (matrices), etc.

II. Développer une expression polynomiale

Dans la suite les indéterminées, X, seront notées comme des variables (x).

1. Développer, réduire et ordonner.

$x^2(3x-1)$ n'est, a priori, pas un polynôme puisque ce n'est pas une somme de monômes. Cependant en distribuant x^2 :

$$x^2(3x-1) \quad = \quad x^2\times 3x - x^2\times 1 \quad = \quad x^2\times 3x^1 - x^2 \quad = \quad 3x^{2+1}-x^2 \quad = \quad 3x^3-x^2$$

Ainsi $x^2(3x-1) = 3x^3-x^2$ est bien un polynôme de degré 3.

Afin d'identifier chaque polynôme, la convention est de l'écrire sous forme développée, réduite et ordonnée.

Définition 2:
Deux polynômes sont dits égaux lorsqu'ils ont la même expression développée, réduite et ordonnée.

2. La boîte à outil pour développer.

Propriété 1 :

Les lettres a, b, c, d désignent des nombres, des expressions algébriques, des fonctions numériques etc.

1. Distributivité de la multiplication sur l'addition : $a(b+c) = ab+ac$
2. Double distributivité : $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$
3. Identités remarquables :

   • $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ • $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ • $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

Démonstration :

1. La distributivité n'est pas démontrable. C'est un axiome de la construction de la multiplication de l'ensemble des nombres réels.
2. On applique en deux temps la propriété de distributivité.
3. Les égalités se démontrent en partant du membre de gauche vers la droite en faisant :
   a. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ puis on utilise la double distributivité.
   b. $(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$ puis on utilise la double distributivité.
   c. En utilisant la double distributivité.

■

III. Factoriser une expression polynomiale

Factoriser c'est écrire une expression algébrique sous forme d'un produit.
Toute expression polynomiale est factorisable puisque : $P(X) = 1 \times P(X)$ (factorisation triviale).
La factorisation est utile dans les situations suivantes :

simplifier un quotient, résoudre des équations.

La factorisation n'est pas évidente mais souvent astucieuse contrairement au développement. Il s'agit de reconnaître dans l'expression algébrique les formules classiques de la proposition suivante.

Propriété 2 :

Quelque soient les nombres a, b et c réels

1. $ab+ac = a(b+c)$ facteur commun.
2. $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$ identité remarquable.
3. $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$ identité remarquable.
4. $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ identité remarquable.

Démonstration :

Les trois dernières égalités se déduisent de la première qui est en fait la distributivité. ■

Méthode 1 :

Il n'y a pas d'algorithme pour factoriser une expression mais vous pourrez essayer (sans garantie de réussite) dans l'ordre :

1. de chercher un facteur commun :
   - Identifier les termes de la somme (ou différence).
   - Écrire chacun des termes sous forme d'un produit.
   - Identifier un facteur commun à tous les termes.
2. d'utiliser une identité remarquable,
3. de factoriser une partie de l'expression pour faire apparaître un facteur commun ou une identité remarquable,
4. et enfin de développer en espérant pouvoir ensuite factoriser.