❄ Chapitre 18 ❄

Fonction de référence

Objectif du chapitre :

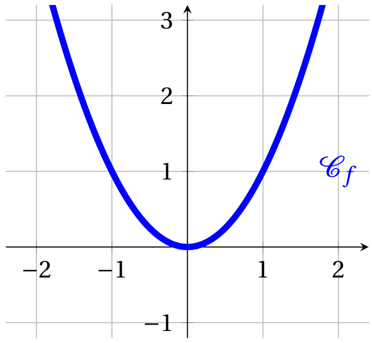
- Construire la représentation graphique de ces fonctions
- Connaitre et utiliser le tableau de variation de ces fonctions
- Connaitre et utiliser le tableau de signe de ces fonctions

I. Fonction carrée

Définition 1:

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto x^2$ s'appelle la **fonction carrée**.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$



Dans un repère $(O; I; J)$, la courbe représentative de la fonction carré est une **parabole** de sommet O.
Cette parabole admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, ce qui caractérise une fonction **paire**.

Propriété 1 :

La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Démonstration : *Exigible en fin de seconde*

Proposition à démontrer : « La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$. »

On va faire un raisonnement par disjonction des cas :

- Commençons par démontrer que la fonction carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

  Soient a et b deux nombres réels positifs tels que $a < b$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

  $$\begin{aligned} a < b \quad &\Longrightarrow \quad a \times a < b \times a \quad \text{et} \quad a \times b < b \times b \\ &\Longrightarrow \quad (a)^2 < b \times a < (b)^2 \quad \Longrightarrow \quad (a)^2 < (b)^2 \quad \Longrightarrow \quad f(a) < f(b) \end{aligned}$$

  Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

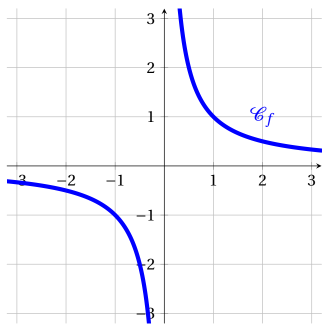
- On procède de même pour montrer que la fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ ■

II. Fonction inverse

Définition 2:

La fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est la **fonction inverse**.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	0 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 0



Dans un repère $(O; I; J)$ la courbe représentative de la fonction inverse est une **hyperbole** de centre O.
Cette hyperbole admet l'origine O du repère comme centre de symétrie, ce qui caractérise une fonction **impaire**.

Propriété 2 :
La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

Démonstration : *Exigible en fin de seconde*
Proposition à démontrer : « La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. »

- Commençons par démontrer que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty]$:
  Soient a et b deux nombres réels positifs tels que $a < b$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} a < b \quad &\Longrightarrow \quad \frac{a}{a} < \frac{b}{a} \quad \Longrightarrow \quad 1 < \frac{b}{a} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{b} < \frac{b}{a \times b} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \quad \Longrightarrow \quad f(b) < f(a) \end{aligned}$$

  Donc la fonction f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$
- Démontrons maintenant que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$:
  Soient a et b deux nombres réels négatifs tels que $a < b$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$

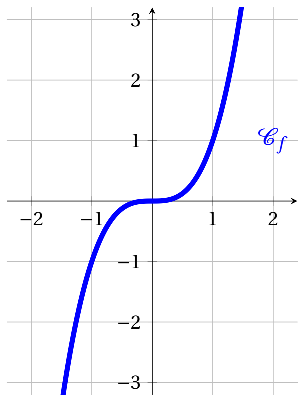
$$\begin{aligned} a < b \quad &\Longrightarrow \quad \frac{a}{a} > \frac{b}{a} && \text{car } a \text{ est négatif} \\ &\Longrightarrow \quad 1 > \frac{b}{a} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{b} < \frac{b}{a \times b} && \text{car } b \text{ est négatif} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \quad \Longrightarrow \quad f(b) < f(a) \end{aligned}$$

  Donc la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ ■

III. Fonction cube

Définition 3:
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto x^3$ est appelée **fonction cube**

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$



La fonction cube est **impaire** : sa courbe représentative est symétrique par rapport a l'origine du repère.
La courbe représentant la fonction cube dans un repère orthogonal est appelée **cubique**

Propriété 3 :
La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :
Proposition à démontrer : « La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ »

On utilise l'identité remarquable : $a^3 – b^3 = (a–b)(a^2 + ab + b^2)$
On va effectuer un raisonnement par disjonction des cas :

- Soient a et b deux nombres réels **positifs** tels que $a < b$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

Étudions le signe de $a^3 – b^3$:

$$a^3 – b^3 = (a – b)(a^2 + ab + b^2)$$

Or le signe de $a – b$ est strictement négatif puisque si $a < b$ alors $a – b < 0$, et le signe de $a^2 + ab + b^2$ est strictement positif puisque a et b sont positifs.
Le produit est donc négatif et $a^3 < b^3$.

La fonction cube conserve l'ordre des nombres sur $[0; +\infty[$, donc la fonction cube est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

- Soient a et b deux nombres réels **négatifs** tels que $a < b$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
  Étudions le signe de $a^3 – b^3$:

$$a^3 – b^3 = (a – b)(a^2 + ab + b^2)$$

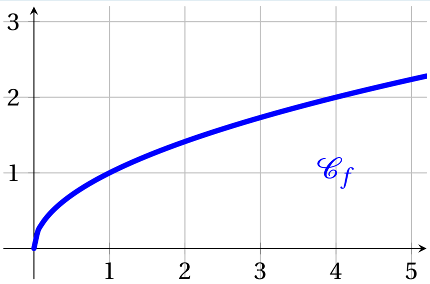
Or le signe de $a – b$ est strictement négatif puisque si $a < b$ alors $a – b < 0$, et le signe de $a^2 + ab + b^2$ est strictement positif car somme de nombres positifs.
Le produit est donc négatif et $a^3 < b^3$.

La fonction cube conserve l'ordre des nombres sur $]-\infty; 0]$, donc la fonction cube est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$.

Conclusion : La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ■

IV. Fonction racine carrée

Définition 4:
La fonction définie sur $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$ par $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est appelée fonction **racine carrée**



x	0	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

Propriété 4 :
La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

Démonstration : *Exigible en fin de seconde*
Proposition à démontrer : « La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ »

Soient a et b deux nombres réels positifs tels que $a < b$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Étudions la différence $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

$$f(a) - f(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)} = \frac{a - b}{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)} < 0 \qquad \text{car } a - b < 0$$

Donc $f(a) < f(b)$, donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ ■

V. Parité d'une fonction

En règle générale, une fonction n'est ni paire ni impaire.
Cependant, certaines fonctions possèdent ces caractéristiques de parité qui facilite l'étude de la fonction.

1. Fonction paire

Définition 5:
Une fonction f définie sur un ensemble I symétrique par rapport à 0 est paire si et seulement si pour tout $x \in I$:

$$f(-x) = f(x)$$

Propriété 5 :
Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Méthode 1 : *Comment montrer qu'une fonction est paire*

1. Il peut s'avérer utile de tracer la courbe représentative de f à la calculatrice. Si la courbe semble symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on pourra supposer que la fonction est paire.
2. On vérifie que l'ensemble de définition de la fonction est symétrique par rapport à 0. Si l'ensemble de définition n'est pas symétrique par rapport à 0, la fonction n'est ni paire ni impaire.
3. On démontre que f est paire :
   - On calcule $f(-x)$ en remplaçant x par $(-x)$ dans l'expression de $f(x)$.
   - On montre que $f(-x) = f(x)$

Remarque :
Pour montrer qu'une fonction f n'est pas paire, il suffit d'un contre-exemple c'est à dire qu'il suffit de trouver un nombre a tel que $f(-a) \neq f(a)$

2. Fonction impaire

Définition 6:
Une fonction f définie sur I, symétrique par rapport à 0, est paire si et seulement si pour tout $x \in I$:

$$f(-x) = -f(x)$$

Propriété 6 :
La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Méthode 2 : *Comment montrer qu'une fonction est impaire*

1. Il peut s'avérer utile de tracer la courbe représentative de f à la calculatrice. Si la courbe semble symétrique par rapport à l'origine, on pourra supposer que la fonction est impaire.
2. On vérifie que l'ensemble de définition de la fonction est symétrique par rapport à 0. Si l'ensemble de définition n'est pas symétrique par rapport à 0, la fonction n'est ni paire ni impaire.
3. On démontre que f est impaire :
   - On calcule $f(-x)$ en remplaçant x par $(-x)$ dans l'expression de $f(x)$.
   - On montre que $f(-x) = -f(x)$

Remarque :
Pour montrer qu'une fonction f n'est pas impaire, il suffit d'un contre-exemple c'est à dire qu'il suffit de trouver un nombre a tel que $f(-a) \neq -f(a)$