❄ Chapitre 12 ❄

Inéquations

I. "Résolution graphique" d'inéquation

1. Inéquation de la forme $f(x) \leqslant k$ (avec $k \in \mathbb{R}$)

Propriété 1 :

Soient f une fonction de courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et k un réel.

Les solutions de l'équation $f(x) \leqslant k$ [respectivement $f(x) \geqslant k$] sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés en dessous [respectivement au dessus] de la droite horizontale d'équation $y = k$.

Méthode 1 :

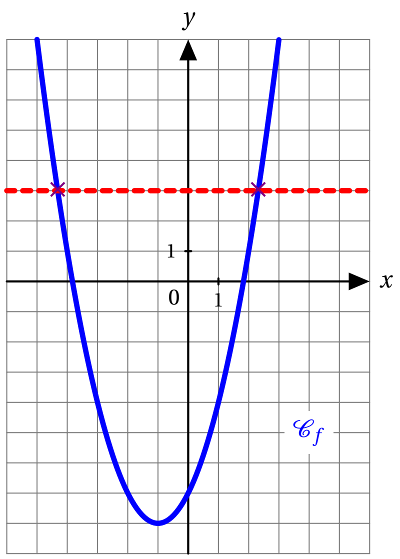
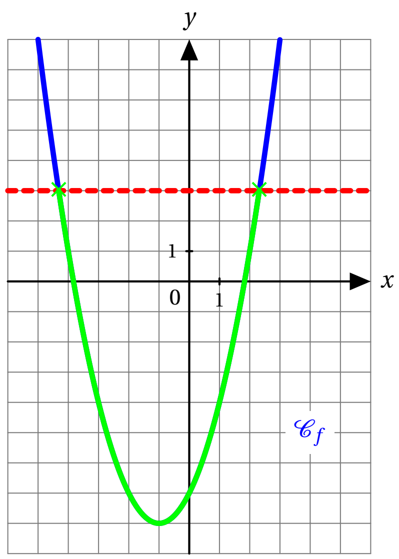
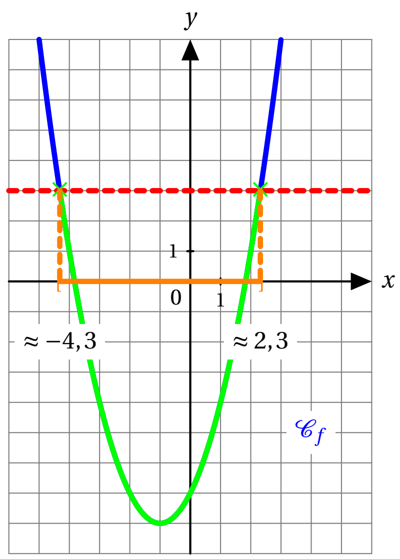
Pour conjecturer les solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 \leqslant 3$ nous introduisons encore la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x - 7 \end{array}$$

puis traçons sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ avec un logiciel ou une calculatrice.

Les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 3$ sont les abscisses des points de la courbe d'ordonnée plus petites que 3.

Les étapes de la recherche sont les suivantes :

1	2	3
Dessinez l'ordonnée 3.	Identifiez les points de la courbe dont l'ordonnée est plus petite que 3.	Lire les abscisses correspondantes.
		

Enfin donnez les solutions sous forme d'ensemble : l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 \leqslant 3$ est $[-4,3\,;\,2,3]$.

Remarque :

Si l'inégalité avait été stricte ($x^2 + 2x - 7 < 3$) l'ensemble des solution eût été ouvert ($]-4,3\,;\,2,3[$).

2. Inéquation de la forme : $f(x) \leqslant g(x)$.

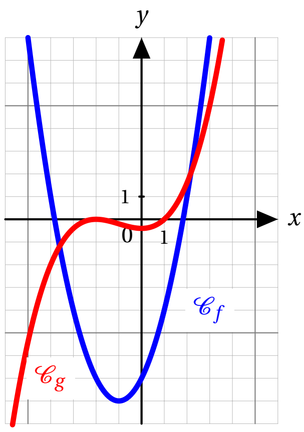
Propriété 2 :

Soient f et g deux fonctions de courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
Les solutions de l'équation $f(x) \leqslant g(x)$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés en dessous de $\mathscr{C}_g$.

Propriété 3 :

Soient f et g deux fonctions de courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
Les solutions de l'équation $f(x) \geqslant g(x)$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés au dessus de $\mathscr{C}_g$.

Méthode 2 :



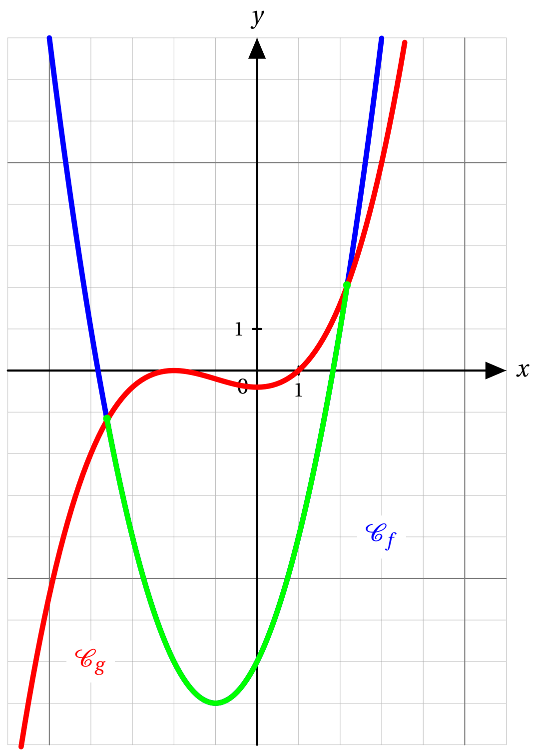
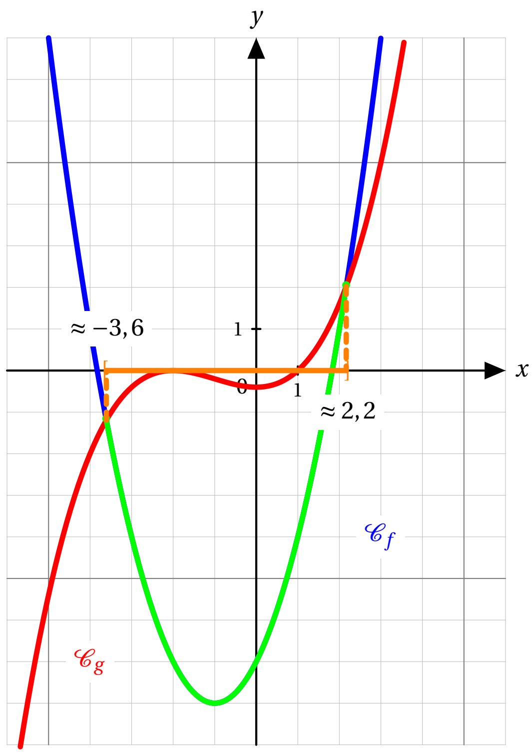
Pour conjecturer les solutions de l'inéquation $x^2+2x-7 \leqslant 0,1(x+2)^3-0.3(x+2)^2$ nous introduisons encore les fonctions

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+2x-7 \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0,1(x+2)^3-0.3(x+2)^2 \end{array}$$

puis traçons leurs courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ avec un logiciel.

Les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés en dessous de ceux de la courbe $\mathscr{C}_g$.

Les étapes de la recherche sont les suivantes :

1	2
Identifiez les points de $\mathscr{C}_f$ situés en dessous de ceux de $\mathscr{C}_g$.	Lire les abscisses correspondantes.
	

Enfin donnez les solutions sous forme d'ensemble : l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2+2x-7 \leqslant 0,1(x+2)^3-0.3(x+2)^2$ est $\mathscr{S} = [-3,6\,;\,2,2]$.

II. Résolution algébrique d'une inéquation

1. Généralités sur les inéquations

Une inéquation est une inégalité qui peut être vraie ou fausse suivant les valeurs attribuées aux variables.

Résoudre une inéquation c'est trouver toutes les valeurs qui rendent l'inéquation vraie.

Cette année les ensembles de solutions des inéquations seront souvent des intervalles ou des réunions d'intervalles.

Pour résoudre les inéquations nous regrouperont tous les termes d'un seul côté du signe d'inégalité afin de se ramener à une inégalité à 0 c'est-à-dire à une étude de signe.

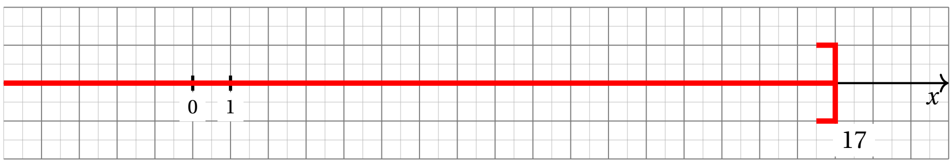
2. Modifications autorisées sur les inéquations

Propriété 4 :
On ne modifie pas les résultats d'une inéquation en additionnant (respectivement en soustrayant) par un même nombre des deux côtés de l'inégalité.

Remarque :
Pour additionner ou soustraire les équations et les inéquations se manipulent de la même façon.

Exemple 1:
Résolvons l'inéquation $x-5 \leqslant 12$

$$\begin{aligned} x-5 &\leqslant 12 \\ x-5+5 &\leqslant 12+5 \\ x &\leqslant 17 \end{aligned}$$



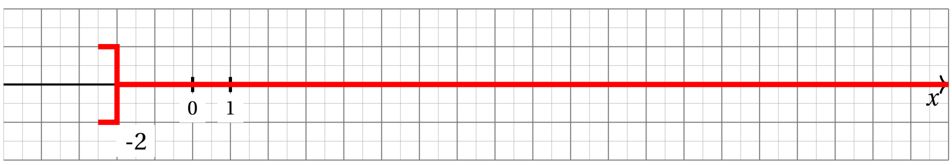
On en conclut que les solutions de cette inéquation sont tous les nombres réels inférieurs ou égaux à 17 :

$$\mathscr{S} =]-\infty ; 17]$$

Propriété 5 :
On ne modifie pas les résultats d'une inéquation en multipliant (respectivement en divisant) par un même nombre strictement positif des deux côtés de l'inégalité.

Exemple 2:
Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3x > -6$.

$$\begin{aligned} 3x &> -6 \\ \frac{3}{3}x &> \frac{-6}{3} \\ x &> -2 \end{aligned}$$



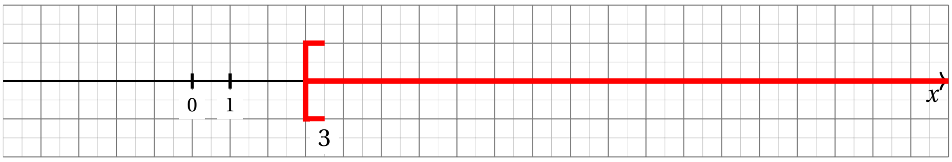
On en conclut que les solutions de cette inéquation sont tous les nombres réels strictement supérieurs à -2 :

$$\mathscr{S} =]-2 ; +\infty[$$

Propriété 6 :
Pour ne pas modifier les solutions d'une inéquation en multipliant (respectivement en divisant) par un même nombre strictement négatif des deux côtés de l'inégalité il faut changer le sens de l'inégalité.

Exemple 3:
Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-4x \leqslant -8$.

$$-4x \leqslant -12$$
$$\frac{-4}{-4}x \geqslant \frac{-12}{-4},\ \text{car } -4<0$$
$$x \geqslant 3$$



On en conclut que les solutions de cette inéquation sont tous les nombres réels supérieurs ou égaux à 3 :

$$\mathscr{S} = [3;+\infty[$$

3. Inéquation polynomiale de degré 1

Définition 1:
Une inéquation polynomiale de degré 1 (ou inéquation linéaire) est une inéquation de la forme

$$ax+b<0 \quad \text{ou} \quad ax+b\leqslant 0 \quad \text{ou} \quad ax+b>0 \quad \text{ou} \quad ax+b\geqslant 0$$

avec a et b des nombres fixés et x un nombre variable.

Méthode 3 : *Résolution d'une inéquation polynomiale de degré* 1

1. Pour identifier l'inéquation du premier degré on regroupe tous les termes d'un même côté de l'inégalité. Autrement dit il faut se ramener à une inégalité à 0.
2. La résolution des inéquations du premier degré consiste à « isoler le x ».
   Supposons que a n'est pas nul et résolvons

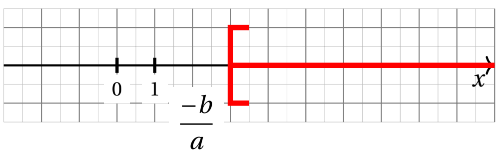
$$ax+b\geqslant 0$$

équivaut successivement à

$$ax+b-b\geqslant 0-b$$
$$ax\geqslant -b$$

Ce qui équivaut encore, si $a>0$ à :

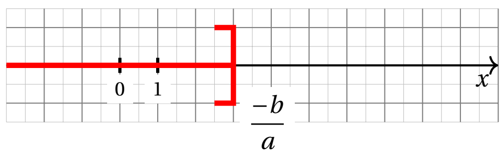
$$\frac{ax}{a}\geqslant\frac{-b}{a},\ \text{car } a>0$$
$$x\geqslant -\frac{b}{a}$$



L'ensemble des solutions de l'équation $ax+b\geqslant 0$ est $\mathscr{S}=\left[-\frac{b}{a}\ ;\ +\infty\right[$.

Ce qui équivaut encore, si $a<0$ à :

$$\frac{ax}{a}\leqslant\frac{-b}{a},\ \text{car } a<0$$
$$x\leqslant -\frac{b}{a}$$



L'ensemble des solutions de l'équation $ax+b\geqslant 0$ est $\mathscr{S}=\left]-\infty\ ;\ -\frac{b}{a}\right]$.

Remarque :
Il reste encore beaucoup de type d'équations et d'inéquations différentes de celle que nous venons d'étudier. Notamment les cas des équations et inéquations produits / quotients qui seront traités dans le chapitre 19.