❉ Chapitre 1 ❉

Les nombres 1

Objectif du chapitre :

- Connaitre ce que sont $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ainsi que leurs noms et notations.
- Appliquer les règles de priorités opératoires.
- Faire les additions et multiplications de nombres négatifs ou positifs.
- Connaitre le nom du résultat d'un calcul.

I. Entiers naturels : $\mathbb{N}$

Définition 1:

Les entiers naturels sont les nombres qui servent à dénombrer, à compter.
L'ensemble de tous les entiers naturels est :

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$$

Ce sont des nombres positifs ou nuls.

Remarque :

1. La notation $\mathbb{N}$ représente la première lettre de « naturel ».
2. En fait l'ensemble des nombres entiers naturels se construit logiquement.
3. Parmi les mathématiciens qui ont marqué l'étude de l'ensemble des entiers naturels :
   Hermann Günther Grassmann (XIX^e siècle), Giuseppe Peano (fin XIX^e siècle).

   Voir la frise chronologique

1. Divisibilité

Définition 2:

Un nombre entier a est divisible par un nombre entier b si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.
Dans ce cas, a est un multiple de b et b est un diviseur de a.

Exemple 1:

72 est divisible par 24. En effet, $72 = 3 \times 24 + 0$ donc le reste de la division euclidienne de 72 par 24 est nul.
On peut donc dire que 72 est un multiple de 24 et de 3 ou que 24 est un diviseur de 72.

Définition 3:

Un entier multiple de deux est un entier pair, les autres sont les entiers impairs.

Exemple 2:

72 est un multiple de 2. En effet, $2 \times 36 = 72$. Donc 72 est un entier pair.

Propriété 1 :

Soit a un entier naturel, la somme de deux multiples de a est multiple de a.

Démonstration : *Exigible en fin de seconde*

Soient b et c deux nombres entiers.
On cherche à démonter l'implication suivante :

Si b est un multiple de a et c un multiple de a, alors $b+c$ est un multiple de a.

Si b est un multiple de a et c un multiple de a alors il existe m et m' deux entiers tel que :

$$b = m \times a \quad \text{et} \quad c = m' \times a$$

Par addition, on a :

$$b + c = m \times a + m' \times a$$

En factorisant par a, il vient :

$$b + c = (m + m') \times a$$

Donc $b+c$ est un multiple de a. ■

Propriété 2 :

Le carré d'un nombre impair est impair.

Démonstration : *Exigible en fin de seconde*

Soit a un nombre entier.
On cherche à démonter l'implication suivante :

Si a est un nombre impair, alors a^2 est un nombre impair.

Si a est un nombre impair alors il existe k entiers tel que :

$$a = 2 \times k + 1$$

Par multiplication, on a :

$$a^2 = (2 \times k + 1)^2 = (2 \times k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$4k^2$ est un multiple de 2 $(2 \times 2k^2)$
$4k$ est multiple de 2 $(2 \times 2k)$
D'après la propriété précédente, $4k^2 + 4k$ est donc un multiple de deux, donc un nombre pair.
Donc $a^2 = (4k^2 + 4k) + 1$ est un nombre qui est après un nombre pair donc un nombre impair. ■

2. Critère de divisibilité

Méthode 1 :

- Un nombre est divisible par 2 si il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8
- Un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5.
- Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
  Exemple : 249 est divisible par 3 car $2+4+9 = 15$ qui est divisible par 3 $(3 \times 5 = 15)$.
- Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
  Exemple : 2538 est divisible par 9 car $2+5+3+8 = 18$ qui est divisible par 9 $(3 \times 9 = 18)$.

Définition 4:

Un nombre qui n'est divisible que par 1 est lui-même est appelé un nombre premier.

Remarque :

Il n'existe pas à ce jour de formule pour trouver des nombres premiers. Afin d'être certains qu'un nombre soit premier, il faut faire de nombreux calculs, souvent a l'aide d'ordinateur.

II. Entiers relatifs : $\mathbb{Z}$

Définition 5:

Les entiers relatifs sont les entiers naturels et leurs opposés.
L'ensemble de tous les entiers relatifs est :

$$\mathbb{Z} = \{\dots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots\}$$

Propriété 3 :

Les nombres entiers relatifs ont une partie décimale nulle.

Remarque :

1. Autrement dit l'écriture décimale infinie d'un entier ne comporte que des zéros dans la partie décimale. Ainsi : $3 = 3,000\dots$
2. Il existe des nombres qui ne sont pas des entiers. Par exemple $\frac{1}{2}$ n'est pas un entier.
3. La notation $\mathbb{Z}$ (de l'allemand « zahlen » signifiant nombres) fut popularisée par Nicolas Bourbaki.

Propriété 4 :

Le produit de deux nombres de même signe est positif.
Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

Remarque :

0 est dit **absorbant** pour la multiplication : quelque soit le nombre a, $0 \times a = 0$.
1 est dit **neutre** pour la multiplication : quelque soit le nombre a, $1 \times a = a$.

Propriété 5 :

Les règles de priorités pour l'instant se limitent à : (Dans l'ordre des priorités)

1. Les calculs entre parenthèses ou crochets. S'il y a des parenthèses emboîtées les plus emboîtées sont prioritaires.
2. Les multiplications en allant de gauche à droite.
3. Les additions et soustractions en allant de gauche à droite.

III. Nommer le résultat d'un calcul.

Définition 6:

Nous dirons qu'un calcul est une **somme** (respectivement une **différence**, respectivement un **produit**) si la dernière opération effectuée en respectant les priorités opératoires est une addition (respectivement une soustraction, respectivement une multiplication).

À moins de devoir distinguer somme et différence, les résultats d'une addition et d'une soustraction seront très souvent indifféremment appelés des sommes.

Exemple 3:

Ainsi $2 \times (-2) + 4 \times (3-1)$ et $3 - (4-2) \times (5-2)$ sont des sommes tandis que $(3-1) \times (-6-1)$ est un produit.