❉ Chapitre 3 ❉

Les nombres 2

Objectif du chapitre :

- Vocabulaire et notation : puissance, exposant, ensemble des nombres décimaux, $\mathbb{D}$.fraction, nombre décimal, écriture décimale, nombre rationnel, ensemble des nombres rationnels, $\mathbb{Q}$.
- Multiplication, division et puissance de puissance.
- Additionner des fractions : mise au même dénominateur, multiplication et division de fractions.

I. Puissance d'un nombre

Définition 1: *Puissance à exposant positif*

Si x est un nombre et n un entier naturel, alors x^n, qui se lit « x puissance n » ou « x exposant n », est le nombre

$$x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$$

Par convention : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0^n = 0$; pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $a^1 = a$ et $a^0 = 1$;

Exemple 1:

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

$$(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = 27$$

Définition 2: *Puissance à exposant négatif*

Soit n un nombre strictement positif et a un nombre relatif non nul. On appelle « a puissance moins n » le nombre noté a^{-n} tel que :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemple 2:

$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

$(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^{-3}} = \frac{1}{-27} = -\frac{1}{27}$;

Propriété 1 : *Produit et quotient de puissances*

Soit a un nombre relatif non nul ; m et n deux entiers.

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \quad \text{et} \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Exemple 3:

$3^5 \times 3^8 = 3^{5+8} = 3^{13}$

$\frac{5^2}{5^7} = 5^2 \times 5^{-7} = 5^{2-7} = 5^{-5}$

Propriété 2 : *Puissance de produit et de quotient*

Soit a et b deux nombres relatifs non nuls, soit n un entier.

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n \quad \text{et} \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Exemple 4:

$3^5 \times 2^5 = (3 \times 2)^5 = 6^5$

$\frac{5^3}{10^3} = \left(\frac{5}{10}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

Propriété 3 : *Puissance de puissance*

Soit a un nombre relatif ; soit m et n des entiers

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

Exemple 5:

$(5^3)^4 = 5^{3\times 4} = 5^{12}$

$(2^4)^{-5} = 2^{4\times(-5)} = 2^{-20} = \frac{1}{2^{20}}$

II. Les nombres décimaux : $\mathbb{D}$

Définition 3:

Un nombre est décimal si et seulement si il admet un développement décimal limité, c'est-à-dire si et seulement si il possède une écriture avec un nombre fini de chiffres après la virgule.
L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Remarque :

- Lorsqu'un nombre, dans son écriture décimale, n'a que des zéros à partir d'un certain nombre de décimales alors on dit que c'est un nombre décimal.
  Ainsi : $2\,315{,}895\,643 = 2\,315{,}895\,643\,000\ldots$ est un nombre décimal.
  Tous les nombres décimaux peuvent s'écrire sous forme de fraction : $2\,315{,}895\,643 = \dfrac{2\,315\,895\,643}{1\,000\,000}$.
- Plus généralement, les nombres décimaux peuvent s'écrire comme quotient d'un entier relatif par une puissance d'exposant positif de 10 :
  Un nombre est décimal s'il peut s'écrire $\dfrac{a}{10^n}$, a appartenant à $\mathbb{Z}$ et n à $\mathbb{N}$

Avec les définition ci-dessus, on observe plusieurs manières d'écrire un nombre :

- **l'écriture décimale** : La partie décimale compte un nombre fini de chiffres non nuls.
  Par exemple, $237,698$ qui a pour partie entière 237 et pour partie décimale 698
- **écriture scientifique** : C'est l'écriture sous forme du produit d'un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule et d'une puissance de 10 (d'exposant entier relatif)
  Par exemple, $38 = 3,8 \times 10^1$ ou $0,0562 = 5,62 \times 10^{-2}$ ou encore $-97631 = -9,7631 \times 10^4$

III. Les fractions

Définition 4:

Une fraction est un nombre qui peut s'écrire comme le quotient d'un entier (relatif) par un autre entier (relatif non nul).

Au lycée et ultérieurement on utilise que la notation fractionnaire $\left(\dfrac{1}{3}\right)$ pour la division et plus le $\div$ $(1 \div 3)$.

Remarque :

1. Il existe des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme de fractions : $\sqrt{2}$, π (admis).
2. Rappelons une règle de priorité opératoire : dans une fraction la division correspondant à la fraction est la dernière opération effectuée.
3. La manipulation des fractions nécessite de connaître les règles :

d'addition (réduire au même dénominateur),	de multiplication,	de division
$\dfrac{a}{b} + \dfrac{x}{y} = \dfrac{ay + xb}{by}$	$\dfrac{a}{b} \times \dfrac{x}{y} = \dfrac{a \times x}{b \times y}$	$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{y}{x}$.

   Rappelons encore que pour simplifier une fraction il faut qu'il y ait un facteur commun au numérateur et au dénominateur :
$$\frac{a \times x}{b \times x} = \frac{a}{b}$$
4. Une astuce d'écriture qui nous sera souvent utile
$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \times a$$
5. Rappelons enfin qu'il est impossible de diviser par 0.
   Raisonnons par l'absurde :
   Supposons qu'il existe un nombre q tel que $\frac{3}{0} = q$ (nous supposons que l'on peut diviser 3 par 0).
   Donc $3 = 0 \times q$.
   Ce qui est impossible car $0 \times q = 0$ (0 est une valeur absorbante).
   Nous avons donc démontré par l'absurde qu'il est impossible de diviser 3 par 0.

Propriété 4 :

Les règles de priorités pour l'instant se limitent à :

1. Les calculs entre parenthèses ou crochets. S'il y a des parenthèses emboîtées les plus emboîtées sont prioritaires. La barre de fraction joue le même rôle que des parenthèses autour des numérateurs et dénominateurs.
2. Les exposants (puissances)
3. Les multiplications et division (÷) en allant de gauche à droite.
4. Les additions et soustractions en allant de gauche à droite.

IV. Les nombres rationnels : $\mathbb{Q}$

Définition 5:

Les nombres rationnels sont les nombres qui peuvent s'écrire sous forme de fraction.
L'ensemble de tous les nombres rationnels est noté : $\mathbb{Q}$.

Remarque :

- Il existe des nombres qui ne sont pas décimaux et qui sont rationnels.
  Ainsi $\frac{1}{3}$ est un nombre rationnel mais son écriture décimale est infinie donc ce n'est un nombre décimal.

  Démonstration : *Exigible en fin de seconde*

  Proposition à démontrer : « $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal ».

  On va démontrer cette proposition par l'absurde :

  Supposons que $\frac{1}{3}$ soit décimal. Alors il est de la forme $\frac{a}{10^n}$, a appartenant à $\mathbb{Z}$ et n à $\mathbb{N}$.
  On en déduit que :

  $$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n} \iff \frac{1}{3}\times 3 = \frac{a}{10^n}\times 3 \iff 1 = \frac{3a}{10^n} \iff 1\times 10^n = \frac{3a}{10^n}\times 10^n \iff 10^n = 3\times a$$

  Alors l'une des puissances de 10 serait un multiple de 3.
  C'est faux d'après les critères de divisibilité (et sans même avoir à poser la division décimale).
  Donc $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal. ■
- Tous les nombres ne sont pas rationnels.
- Lorsqu'un nombre rationnel a une écriture décimale infinie on préfère son écriture fractionnaire.
- Un nombre rationnel admet une écriture fractionnaire canonique appelée la forme irréductible qui est obtenue lorsque le PGCD des numérateur et dénominateur est 1 (ils n'ont pas de facteur commun).
  Certaines calculatrices donnent la forme irréductible.

Propriété 5 :

Lorsqu'un nombre a une écriture décimale infinie périodique c'est un nombre rationnel.

Remarque :

On dit que l'écriture est périodique lorsqu'une série de chiffre se reproduit indéfiniment.

Exemple 6:

- $0,333\ldots$ est rationnel, en effet c'est l'écriture décimal de la fraction $\frac{1}{3}$
- $45,78242424\ldots$ est aussi rationnel, bien que sa forme fractionnaire sois plus dur à déterminer