❊ Chapitre 4 ❊

Pourcentage et proportion

I. Proportion dans un ensemble

Définition 1:

Soit A une partie d'une population E. La proportion des éléments de A **par rapport à** E est

$$p = \frac{\text{Nombre d'éléments de A}}{\text{Nombre d'éléments de E}} = \frac{n_A}{n_E}$$

Remarque :

Comme A est une sous population de E, on a toujours $n_A < n_E$ donc pour une proportion p, on aura toujours :

$$0 < p = \frac{n_A}{n_E} < 1$$

Lorsqu'on connait deux quantités parmi les trois termes p, n_A et n_E, on peut retrouver le troisième :

Propriété 1 :

Soit $p = \frac{n_A}{n_E}$ la proportion de A dans E, alors on a :

- $n_A = p \times n_E$
- $n_E = \frac{n_A}{p}$

Exemple 1:

Dans une population de référence constituée de 400 personnes, on suppose que 56 personnes ont une particularité A. La proportion de personnes ayant la particularité A est $\dfrac{56}{400}$.
On peut trouver le pourcentage, en complétant le tableau de proportionnalité suivant :

400	100
56	$100 \times \frac{56}{400} = 14$

Le nombre 14 représente le nombre de personnes ayant la particularité A **parmi 100** personnes.

Propriété 2 :

Le pourcentage t d'une population ayant un caractère A donné est égal à la proportion de la population ayant ce caractère multiplié par 100 :

$$t = proportion \times 100 = \frac{\text{Nombre de personnes ayant le caractère A}}{\text{taille de la population considérée}} \times 100$$

Remarque :

On voit qu'une proportion peut s'exprimer sous trois formes différentes. Si on reprend l'exemple précédent, on peut exprimer la proportion de personnes ayant la particularité A sous forme :

- décimale : $\frac{56}{400} = 0.14$
- d'une fraction irréductible : $\frac{56}{400} = \frac{7}{50}$
- d'un pourcentage : $\frac{56}{400} = 14\%$

II. Comparaison de proportion

Propriété 3 :

1. Si deux sous-populations font partie d'**une même population de référence**, alors leurs proportions sont rangées **dans le même ordre** que les effectifs.
2. Si deux sous-populations font partie **de populations de référence différentes**, alors leurs proportions **ne sont pas forcément rangées dans le même ordre** que les effectifs.

Exemple 2:

1. Sur les 35 élèves d'une classe de 1STMG, il y 16 filles. Comparons les effectifs et les proportions des filles et des garçons dans cette classe.
   L'effectif de la population de référence est de $n_E = 35$. L'effectif des filles est $n_F = 16$. Par différence, on obtient le nombre de garçons :
   $$n_G = n_E - n_F = 19. \quad \text{On a donc } n_G > n_F$$
   D'après la propriété ci-dessus, on peut en déduire que la proportion de garçons p_G est supérieur à la proportion de filles p_F car ce sont deux sous-populations d'une même population de référence.
   En pratique, on a :
   $$p_F = \frac{n_F}{n_E} = \frac{16}{35} \approx 0.457 \quad \text{et} \quad p_G = \frac{n_G}{n_E} = \frac{19}{35} \approx 0.543. \quad \text{On a bien } p_G > p_F$$
2. L'année dernière, il y avait 30 élèves en TS1 et 35 en TS2. 28 élèves ont réussi leur bac en TS1 et 30 en TS2. Comparons les effectifs et les proportions des élèves qui ont réussi au bac dans les deux classes.
   - E : "classe de TS1" et A : "le groupe d'élèves de TS1 bacheliers".
   - F : "classe de TS2" et B : "le groupe d'élèves de TS2 bacheliers".

   On a : $n_E = 30$ et $n_A = 28$. De même $n_F = 35$ et $n_B = 30$. Donc $n_A < n_B$.
   Par contre :
   $$p_A = \frac{n_A}{n_E} = \frac{28}{30} \approx 0.933 = 93.3\% \quad \text{et} \quad p_B = \frac{n_B}{n_F} = \frac{30}{35} \approx 0.857 = 85.7\%$$
   Conclusion, on a $n_A < n_B$ mais $p_A > p_B$ car ce sont deux sous-populations de deux populations de références différentes.

III. Inclusion

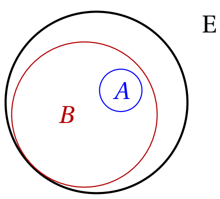
Définition 2:
Un ensemble A est inclus dans un ensemble B, noté $A \subset B$, lorsque tous les éléments de A appartiennent à B.

Exemple 3:
Soit E l'ensemble des élèves du lycée et A les élèves de cette classe de Seconde. On voit que tous les élèves de seconde sont aussi des élèves du lycée. On peut donc en déduire que $A \subset E$.

Propriété 4 :
Dans une population E, considérons deux sous-populations A et B. Supposons que A est incluse dans B, alors $A \subset B \subset E$:

De plus, la proportion p_A de A dans E est égale au produit de la proportion p' de A dans B et de la proportion p_B de B dans E :

$$p_A = p' \times p_B$$



Exemple 4:

D'après les chiffres donnés par l'administration, la proportion p_1 d'élèves du lycée en Seconde est de 33%, eux-mêmes répartis en neuf classes. Donc, la proportion p_2 d'élèves de Seconde dans cette classe est de : $p_2 = \frac{1}{9}$. La proportion p d'élèves du lycée dans cette classe est donc de :

$$\begin{aligned} p &= p_1 \times p_2 = \frac{33}{100} \times \frac{1}{9} \\ &= \frac{11}{300} \approx 0,0367 = 3,67\% \end{aligned}$$

Il y a donc $3,67\%$ des élèves du lycée qui sont dans cette classe.

IV. Arbre des possibles

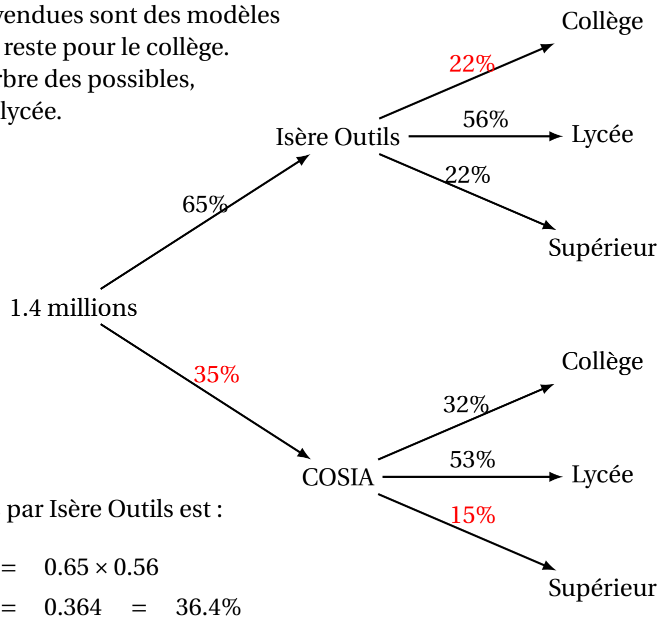
Exemple 5:

Deux fabricants de calculatrices *(Isère Outils et COSIA)* se partagent le marché de 1.4 millions de calculatrices. 65% des calculatrices proviennent du fabricant Isère Outils.

Pour le fabricant COSIA, 32% des calculatrices vendues sont des modèles pour le collège, 53% des calculatrices vendues sont des modèles pour le lycée et le reste sont pour les études supérieures

Pour le fabricant Isère Outils, 56% des calculatrices vendues sont des modèles pour le lycée, 22% sont pour les études supérieures et le reste pour le collège.

On cherche à représenter la situation à l'aide d'un arbre des possibles, puis déterminer le nombres de modèles vendus pour le lycée.



La proportion de calculatrices pour le lycée vendues par Isère Outils est :

$$\begin{aligned} p_{\text{Isère Outils Lycée}} &= 0.65 \times 0.56 \\ &= 0.364 = 36.4\% \end{aligned}$$

La proportion de calculatrices pour le lycée vendues par COSIA est :

$$\begin{aligned} p_{\text{COSIA Lycée}} &= 0.35 \times 0.53 \\ &= 0.1855 = 18.55\% \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} p_{\text{calculatrice lycée}} &= p_{\text{Isère Outils Lycée}} + p_{\text{COSIA Lycée}} \\ &= 36.4\% + 18.55\% = 54.95\% \end{aligned}$$

On peut donc en déduire que les calculatrices lycée représentent 54.95% des ventes de calculatrices, soit :

$$\begin{aligned} n_{\text{calculatrice lycée vendue}} &= n_{totaldecalculatrice} \times p_{\text{calculatrice lycée}} \\ &= 1400000 \times 0.5495 = 769300 \ \text{calculatrices} \end{aligned}$$