

✿ Chapitre 14 ✿

Pourcentage et taux d'évolution

I. Variation absolue et relative

Définition 1:

Une grandeur évolue d'une valeur initiale V_1 à une valeur finale V_2 .

- La **variation absolue** est $V_2 - V_1$
- La **variation relative** est $\frac{V_2 - V_1}{V_1}$

Exemple 1:

Le prix d'un paquet de cigarettes passe de 1.5€ à 7€ en 25 ans. Sur le même temps, le prix du baril de pétrole passe de 40€ à 135€. Quel prix a subi la plus forte augmentation en valeur absolue, en valeur relative?

Pour le paquet de cigarette :

- Variation absolue :

$$V_2 - V_1 = 7 - 1.5 = 5.5\text{€}$$

- Variation relative :

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{7 - 1.5}{1.5} \approx 3.667 = 366.7\%$$

Pour le baril de pétrole :

- Variation absolue :

$$V_2 - V_1 = 135 - 40 = 95\text{€}$$

- Variation relative :

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{135 - 40}{40} \approx 2.375 = 237.5\%$$

Donc en valeur absolue, le baril de pétrole a subi l'augmentation la plus forte, mais en valeur relative, c'est le paquet de cigarette qui a subi l'augmentation la plus forte (*avec un prix multiplié par 4 en 20 ans!*)

II. Taux d'évolution

Définition 2:

On considère deux nombres strictement positifs :

- une valeur de départ V_1
- une valeur d'arrivée V_2 .

Le pourcentage d'évolution (ou taux d'évolution) entre V_1 et V_2 est :

$$t = \frac{V_2 - V_1}{V_1}$$

Exemple 2:

Le prix du diesel est passé en 25 ans de 0.79€/l à 1.12€/l.

Quel est le pourcentage d'évolution du prix du diesel sur cette période?

$$t = \frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{1.12 - 0.79}{0.79} \approx 0.418 = 41.8\%$$

Le prix du diesel a augmenté de 41.8% sur ces 25 années.

Remarque :

Le taux d'évolution est souvent exprimé en pourcentage :

- Si $t \geq 0$, on pose $p = t \times 100$, alors $t = p\%$ et on a **une augmentation** de $p\%$ de V_1 à V_2 .
- Si $t \leq 0$, on pose $p = -t \times 100$, alors $t = -p\%$ et on a **une diminution** de $p\%$ de V_1 à V_2 .

Exemple 3:

La température passe de 21°C en après-midi à 12°C dans la soirée. Quel est le pourcentage d'évolution de la température ?

$$t = \frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{12 - 21}{21} \approx -0.428 = -42.8\%$$

La température a baissé de 42.8% entre l'après-midi et la soirée.

III. Le coefficient multiplicateur

Définition 3:

On considère une quantité passant d'une valeur V_1 à une valeur V_2 . Le coefficient multiplicateur CM est le nombre par lequel il faut multiplier V_1 pour obtenir V_2 :

$$V_2 = CM \times V_1 \iff CM = \frac{V_2}{V_1}$$

Remarque :

Le coefficient multiplicateur est souvent calculé à partir du taux d'évolution. En effet, on a :

$$CM = 1 + t$$

Exemple 4:

Le prix d'un produit, égal à 12€, augmente de 3%. Le taux d'évolution t est égal à 0.03. Le coefficient multiplicateur est donc égal à :

$$CM = 1 + t = 1 + 0,03 = 1.03$$

Le prix après augmentation est alors :

$$V_2 = CM \times V_1 = 1.03 \times 12 = 12.36\text{€}$$

Remarque :

Grâce au relation entre le coefficient multiplicateur CM et le taux d'évolution t, on a :

- Si $CM > 1$, alors on a **une augmentation** de V_1 à V_2 .
- Si $CM < 1$, alors on a **une diminution** de V_1 à V_2 .

IV. Évolutions successives

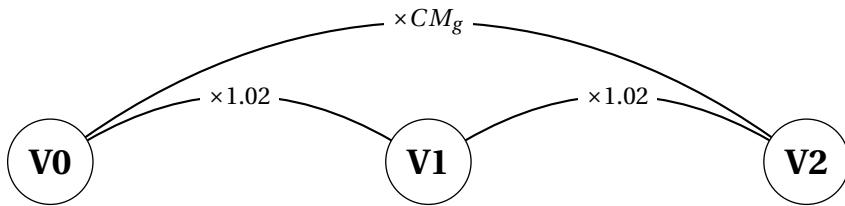
Exemple 5:

Le PEL (Plan d'Epargne Logement) permet de placer de l'argent au taux t de 2% par an. Pierre a placé 1000€ sur son PEL et il aimerait connaître le montant sur son compte au bout de 2 ans, puis de 5 ans.

Afin de simplifier les calculs, dès que l'on travaille sur des évolutions successives, on travaillera toujours avec les **coefficients multiplicateurs**.

$$\begin{aligned} CM &= 1 + t = 1 + \frac{2}{100} \\ &= 1 + 0.02 = 1.02 \end{aligned}$$

Représentation de la situation au bout de deux ans :



D'après les formules vu précédemment, on a :

$$V_2 = V_1 \times 1.02 \quad \text{et} \quad V_1 = V_0 \times 1.02$$

Donc :

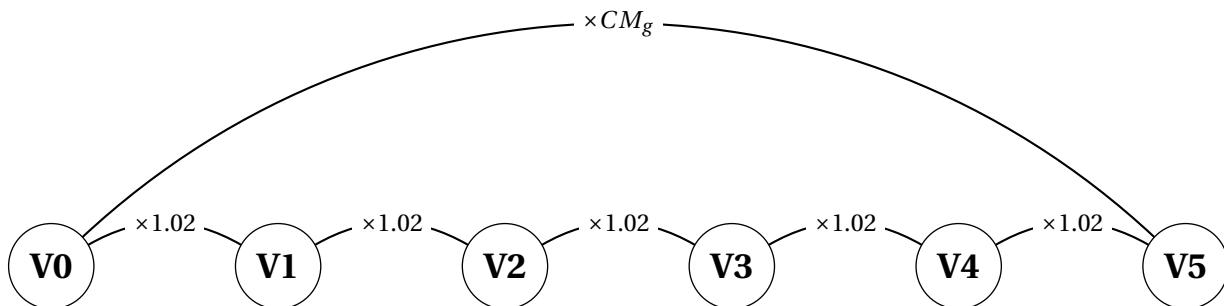
$$\begin{aligned} V_2 &= V_0 \times 1.02 \times 1.02 \\ \frac{V_2}{V_0} &= 1.02^2 \\ CM_g &= 1.02^2 = 1.0404 \end{aligned}$$

Une fois que l'on a obtenu le coefficient multiplicateur global CM_g sur les deux années, on peut trouver le taux d'évolution globale :

$$\begin{aligned} CM_g &= 1 + t_g \\ t_g &= CM_g - 1 = 1.0404 - 1 \\ &= 0.0404 = 4.04\% \end{aligned}$$

Le taux d'évolution globale sur les deux ans est donc de 4.04% (*et pas de 4% comme on aurait pu supposer*)
Finalement, Pierre aura sur son PEL 1040.4€ au bout de deux ans.

Représentation de la situation au bout de 5 ans :



En suivant le même raisonnement que pour deux ans, on obtient :

$$V_2 = V_0 \times 1.02 \times 1.02 \times 1.02 \times 1.02 \times 1.02$$

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_0} &= 1.02^5 \\ CM_g &= 1.02^5 \approx 1.1041 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} CM_g &= 1 + t_g \\ t_g &= CM_g - 1 = 1.1041 - 1 \\ &= 0.1041 = 10.41\% \end{aligned}$$

Le taux d'évolution globale sur les 5 ans est donc de 10.41%.
Finalement, Pierre aura sur son PEL 1104.1€ au bout de 5 ans.

V. Évolutions réciproques

Exemple 6:

Le cours du lait a perdu 20% entre l'année 2009 et 2010. Les éleveurs français, en colère, demande au gouvernement une revalorisation de celui-ci afin de retrouver les cours de 2009. Le Ministre de l'Agriculture aimeraient connaître le taux d'évolution que suggère d'appliquer les éleveurs avant d'en parler à son gouvernement. Pouvez-vous l'aider?

Calcul du coefficient multiplicateur associé à une baisse de 20%

$$\begin{aligned} CM &= 1 + t \\ &= 1 + \frac{-20}{100} \\ &= 1 - 0.2 \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

Schématisation du problème : On a plusieurs possibilités pour pouvoir schématiser ce problème.

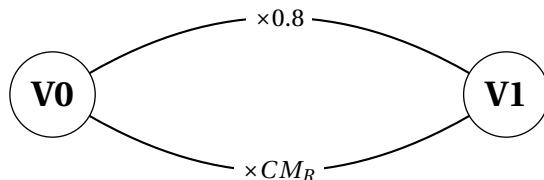


Schéma possible 1

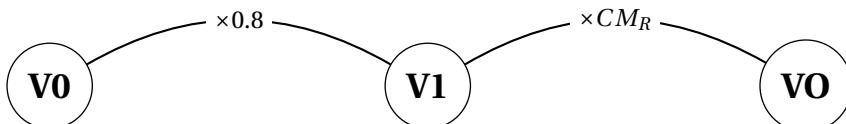


Schéma possible 2

D'après les formules vu précédemment, on a :

$$V_1 = V_0 \times 0.8 \text{ et } V_0 = V_1 \times CM_R$$

Donc :

$$\begin{aligned} V_1 &= V_1 \times CM_R \times 0.8 \\ \frac{V_1}{V_1} &= CM_R \times 0.8 \\ 1 &= CM_R \times 0.8 \\ \frac{1}{0.8} &= CM_R \\ 1.25 &= CM_R \end{aligned}$$

On en déduit la valeur du taux d'évolution réciproque t_R :

$$\begin{aligned} CM_R &= 1 + t_R \\ t_R &= CM_R - 1 \\ &= 1.25 - 1 \\ &= 0.25 \\ &= 25\% \end{aligned}$$

Le Ministre de l'Agriculture devra donc demander que le cours du lait soit augmenté de 25% pour que les éleveurs se retrouvent dans la situation de 2009.